

FORTSETZUNG HOLOMORPHER KANTEN -  
EIGENTLICHER KORRESPONDENZEN

1972

Helmut Stiegler

München



FORTSETZUNG HOLOMORPHER KANTENEIGENTLICHER

KORRESPONDENZEN

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung der Doktorwürde  
der  
Fakultät für Mathematik  
der  
Ludwig-Maximilians-Universität  
München

Vorgelegt von Helmut Stiegler aus München  
am 19. Juli 1971



1. Berichterstatter : Professor Dr. K. Stein
  2. Berichterstatter : Priv. Dozent Dr. K.W. Wiegmann
- Tag der mündlichen Prüfung : 03. 02. 1972

# INHALT

|                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Einleitung .....                                                                                                                               | 1  |
| § 0 Definitionen und vorbereitende Hilfssätze .....                                                                                            | 8  |
| § 1 Holomorphe Überlagerungskorrespondenzen<br>zwischen Gebieten im $\phi^n$ .....                                                             | 31 |
| § 2 Fortsetzung holomorpher Überlagerungskorrespondenzen<br>zwischen analytischen Polyedergebieten im $\phi^n$ ....                            | 48 |
| § 3 Fortsetzung holomorpher, kanteneigentlicher<br>Korrespondenzen zwischen analytischen Polyeder-<br>gebieten in komplexen Zahlenräumen ..... | 68 |
| Literaturverzeichnis .....                                                                                                                     | 94 |



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

## EINLEITUNG

### a) Historisches

Die Thematik dieser Arbeit geht zurück auf die Dissertation Rothsteins (1935), in der biholomorphe Abbildungen von einfach zusammenhängenden Gebieten des  $\mathbb{C}^2$ , die von komplex-analytischen Hyperflächen berandet sind, untersucht werden. Rothstein zeigte, daß Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Funktionen, welche die Randflächen des Bildgebiets definieren, und den entsprechenden zum Urbildgebiet gehörenden Funktionen bestehen. Außerdem formulierte er Voraussetzungen, unter denen die Abbildungen über den gesamten Rand fortsetzbar sind.

Rothsteins Untersuchungen ermöglichten die Konstruktion starrer Holomorphiegebiete (Behnke-Feschl 1936, Hedtfeld 1954). 1960 gelang es Remmert und Stein, die Abhängigkeitsaussage auf den Fall der holomorphen Überlagerungsabbildungen zu verallgemeinern, wobei als Gebietstyp nunmehr analytische Polyedergebiete auftreten. Dieses Ergebnis wurde von Eickel (1961) auf eine größere Gebietsklasse - die sogenannten Pseudo-Polyedergebiete - ausgedehnt.

Eine wesentliche Verallgemeinerung erzielte Rischel (1964), der die Rothsteinsche Abhängigkeitsaussage auf den Fall holomorpher Überlagerungskorrespondenzen zwischen analytischen

Polyedergebieten übertrug. Gleichzeitig konnte er einen Satz von Osorio (1961) über holomorphe Überlagerungsabbildungen zwischen Produktgebieten verallgemeinern auf den Fall holomorpher Überlagerungskorrespondenzen und damit zeigen, daß Hyperkugel und Polyzylinder einander nicht holomorph überlagerbar sind.

## b) Zielsetzung und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit

Die Ziele dieser Arbeit waren:

- (1) Ausdehnung der Rischelschen Ergebnisse auf einen möglichst allgemeinen Gebietstypus.
- (2) Ausdehnung der Rischelschen Methoden auf eine allgemeinere Klasse holomorpher Korrespondenzen.
- (3) Studium des Fortsetzungsproblems von Korrespondenzen, das in diesem Zusammenhang seit Rothstein nicht mehr behandelt worden war.

Zu (1):

Wir führen den Begriff des sogenannten Normalgebiets ein (Definition 5) und beweisen die Rothsteinsche Abhängigkeitsaussage für holomorphe Überlagerungskorrespondenzen zwischen solchen Normalgebieten (Satz 3). Der Typ des Normalgebiets ist allgemeiner als der der von Eickel betrachteten Pseudo-Polyedergebiete: es genügt für die Ränder schwächere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu fordern.

Zu (2):

Wir definieren sogenannte holomorphe kanteneigentliche und vollkanteneigentliche Korrespondenzen (Definition 9) und beweisen eine verallgemeinerte Rothsteinsche Abhängigkeitsaussage für holomorphe kanteneigentliche Korrespondenzen zwischen Polyedergebieten (Satz 4). Unter zusätzlichen Voraussetzungen werden auch weitere, für holomorphe Überlagerungsabbildungen bekannte Aussagen hergeleitet, die sogenannten Stufenbedingungen (Zusätze zu Satz 4).

Unter Kante im obigen Sinn wird das Schnittgebilde mehrerer Randhyperflächenstücke verstanden. Kanteneigentlich heißt dann randeigentlich in allen Punkten einer Kante.

Eine holomorphe vollkanteneigentliche Korrespondenz ist, grob gesagt, eine kanteneigentliche Korrespondenz, die mehrere von solchen Kanten des Urbildgebiets, die alle in einem gewissen Sinn "volle" Kanten sind, surjektiv dem Rand des Bildgebiets zuordnet. (Haben Bild und Urbildgebiet gleiche Dimension, so ist sie eine Überlagerungskorrespondenz.)

Zu (3):

Es wird gezeigt, daß es zu jeder holomorphen vollkanteneigentlichen Korrespondenz zwischen zwei Polyedergebieten eine Fortsetzung in Bild und Urbildgebiet jeweils umfassende Gebiete gibt, welche nur von der geometrischen Situation der einzelnen Polyedergebiete abhängen und fast alle Randpunkte des Bild-

gebiets bzw. fast alle Punkte einer ausgezeichneten Menge von Kanten des Urbildgebiets umfassen (Satz 8).

Im Spezialfall Bishopscher Polyedergebiete kann globale Fortsetzbarkeit über den gesamten Rand beider Polyedergebiete garantiert werden (Satz 7).

(Die Beschränkung der Untersuchung auf Polyedergebiete anstelle von Normalgebieten hat Gründe der Darstellbarkeit.)

Bekanntlich sind Fortsetzungssätze dieser Art für Abbildungen nicht richtig. Die Fortsetzung einer holomorphen Korrespondenz, die eine Abbildung ist, braucht nämlich keine Abbildung mehr zu sein. Das einfachste Beispiel ist die Umkehrkorrespondenz einer biholomorphen Abbildung, die bei Fortsetzung mehrdeutig wird. Wird etwa

$$\{ z \in \phi_z : |z^2 - 1| < 1 \}$$

durch  $w = z^2 - 1$  auf den Einheitskreis abgebildet, so ist jede Fortsetzung über den Nullpunkt in  $\phi_z$  nicht mehr injektiv. Das zeigt, daß erst der Begriff der holomorphen Korrespondenz der Fortsetzungsproblematik angemessen war.

### c) Aufbau der Arbeit

In § 0 sind Definitionen, u.a. von Rischel und Osorio, zusammengestellt. Außerdem wird der Begriff der "Kante", der "vollen Kante", der holomorphen "kanteneigentlichen" und "vollkanteneigentlichen" Korrespondenz eingeführt.

Kern des ersten Teils ist Hilfssatz 3 . Er verbindet Rischels Beweise seiner beiden Hauptsätze mit Hilfe einer Idee, die von Osorio stammt, und bildet die Grundlage für die Behandlung kanteneigentlicher Korrespondenzen. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind nicht einfach, da die bei Rischel benötigten speziellen Begriffe wie "einfaches Randstück" und "Radósches Randstück" explizit aufgeführt werden müssen.

§ 1 enthält die beiden Hauptsätze Rischels (Satz 1 und Satz 2), die nun leicht zu beweisen sind, Satz 3 und Satz 4, die beide Verallgemeinerungen von Satz 2 sind. Zum Beweis von Satz 3 wird noch eine gewisse Modifizierung von Hilfssatz 3 benötigt und bewiesen. Für die Beweise der Zusätze zu Satz 4 wird auf eine Idee eines älteren Beweises von Rischel zurückgegriffen, die verallgemeinert wird. (Die Aussage läßt sich im Fall von Polyedergebieten gleicher Dimension noch etwas allgemeiner fassen, vgl. Lit. 13 .)

§ 2 behandelt die Fortsetzbarkeit holomorpher Überlagerungskorrespondenzen (Satz 5 und Satz 6). Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden sie getrennt formuliert und jeweils bewiesen, sobald die benötigten Hilfsmittel vorhanden sind. Als besonders einfach erweist sich der Fall der Bishopschen Polyedergebiete.

Alle benötigten Aussagen werden in den Hilfssätzen 5 bis 9 zusammengestellt und im Hinblick auf § 3 formuliert.

In § 3 folgen die Fortsetzungssätze für holomorphe vollkanteneigentliche Korrespondenzen (Satz 7 und Satz 8), einschließlich der nur für sie benötigten Hilfsaussagen (Hilfssatz 10 bis 13). Anschließend kann dann gezeigt werden (Satz 9), daß eine holomorphe vollkanteneigentliche Korrespondenz zwischen Polyedergebieten gleicher Dimension eine holomorphe Überlagerungskorrespondenz ist.

Für Anregung und Förderung meiner Arbeit bin ich Herrn Professor Dr. K. Stein zu Dank verpflichtet.

Verabredungen:

Im Folgenden soll, wenn mit  $F : A_1 \longrightarrow A_2$  eine holomorphe Korrespondenz zwischen reduzierten komplexen Räumen  $A_1$  und  $A_2$  bezeichnet wird, mit  $G_F$  der  $F$  in  $A_1 \times A_2$  beschreibende Graph,  $\tilde{F}$  und  $\hat{F}$  die Einschränkungen auf  $G_F$  der Projektionen von  $A_1 \times A_2$  auf  $A_1$  bzw. auf  $A_2$  bezeichnet sein, falls es nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.

Bezeichnet  $z$  einen Punkt im  $\mathbb{C}^n$ , so soll mit  $z_i$  immer die  $i$ -te Koordinate des Punktes  $z = (z_1, \dots, z_n)$  bezeichnet sein.

Als Symbol für den Einheitskreis wird durchwegs  $D$  verwandt. Sein Rand, die 1-Sphäre, wird mit  $T$  bezeichnet.

Entsprechend soll  $D_\epsilon$  die Punktmenge  $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1 + \epsilon\}$  bedeuten,  $T_\epsilon$  ihren Rand.

## § 0 Definitionen und vorbereitende Hilfssätze

Definition 1 : Seien  $X_1, X_2$  reduzierte komplexe Räume und  $F : X_1 \longrightarrow X_2$  eine Korrespondenz, dann heißt  $F$  holomorphe Überlagerungs-<sup>-1</sup>korrespondenz genau dann, wenn  $F$  und  $F^{-1}$  holomorphe, surjektive, offene und nirgends entartete (die Fasern  $F^{-1}(x^2) = \{x^1 : F(x^1) = x^2\}$  haben für alle Punkte  $x^2 \in X_2$  konstante Dimensionen) Korrespondenzen sind.

Definition 2 : Sei  $A$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{C}^n$ , dann heißt eine Teilmenge  $D$  des Randes  $\partial A$  einfaches Randstück genau dann, wenn für ein Gebiet  $B$  im  $\mathbb{C}^1$  gilt: Jede in  $B$  holomorphe Abbildung  $f : B \longrightarrow \mathbb{C}^n$ , für die das Bild von  $B$  vermöge  $f$  ganz in  $D$  enthalten ist, ist konstant.

Definition 3 : Seien  $X, Y, Y_0$  normale komplexe Räume  $f$  und  $f_0$  holomorphe Abbildungen von  $X$  in  $Y$  bzw.  $Y_0$ , dann heißt  $f_0$  von  $f$  strikt abhängig, wenn  $f_0$  auf den Zusammenhangskomponenten der Fasern  $f^{-1}(f(x))_{x \in X}$  konstant ist.

( $f_0$  ist von  $f$  genau dann strikt abhängig, wenn für die Abbildungen  $(f, f_0) : X \longrightarrow Y \times Y_0$  und  $f : X \longrightarrow Y$  gilt, daß ihre geometrischen Ränge  $\text{rg}_x((f, f_0))$  und  $\text{rg}_x(f)$  in allen Punkten  $x \in X$  übereinstimmen.)

$f$  und  $f_0$  heißen im engeren Sinn verwandt genau dann, wenn  $f$  von  $f_0$  und  $f_0$  von  $f$  strikt abhängen.

Definition 4 : Sei  $X$  ein reduzierter komplexer Raum, dann heißt ein Gebiet  $A$  in  $X$  analytisches Polyedergebiet genau dann, wenn gilt:

o) Es gibt eine offene Menge  $U$  in  $X$  und endlich viele in  $U$  holomorphe Funktionen  $f_1, \dots, f_k$ , so daß die Punktmenge  $P := \{ x \in U : |f_k(x)| < 1 \}$  kompakt ist.

1)  $A$  ist eine Zusammenhangskomponente des Innern  $\overset{\circ}{P}$  von  $P$ ,

2) die Punktmengen  $H_k := \{x \in \partial A : |f_k(x)| = 1\}$  sind topologisch  $(2n-1)$ -dimensional.

Ist  $X$  reindimensional und  $\dim(X) = n$ , so heißt ein analytisches Polyedergebiet  $A$  Bishop'sches Polyedergebiet, wenn  $k = n$  ist.

Ist  $A$  ein analytisches Polyedergebiet, so heißen zwei  $A$  definierende Funktionen  $f_i, f_j$  Äquivalent, wenn die Abbildungen  $f_i|_A$  und  $f_j|_A$  im engeren Sinn verwandt sind.

Bezüglich dieser Äquivalenzrelation sprechen wir von Repräsentanten (einer Äquivalentklasse) und von einem Repräsentantensystem (aller Äquivalenzklassen) der  $A$  definierenden Funktionen.

Definition 5 : Sei  $A$  ein Gebiet im  $\mathbb{C}^n$ , dann heißt  $A$  Normalgebiet, wenn es eine offene Menge  $U$  im  $\mathbb{C}^n$  gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- o)  $U$  umfaßt die abgeschlossene Hülle  $\bar{A}$  von  $A$
- 1)  $\bar{A}$  ist kompakt in  $U$
- 2) es gibt endlich viele in  $U$  holomorphe Funktionen  $f_1, \dots, f_k, l_1, \dots, l_s$ , so daß der Rand  $\partial A$  von  $A$  folgendermaßen zerfällt:

$$\partial A = E \cup H \cup \{z \in \partial A : l_\sigma(z) = 0, 1 \leq \sigma \leq s\}$$

wobei  $E$  ein einfaches Randstück von  $A$  im  $\mathbb{C}^n$  ist,

$$H = \bigcup_{\kappa=1}^K \{z \in \partial A : f_\kappa(z) \in E_\kappa\}$$

mit einfachen Randstücken  $E_\kappa$  von Gebieten in  $\mathbb{C}^1$ ,

3)  $H_{\kappa} := \{z \in \partial A : f_{\kappa}(z) \in E_{\kappa}\}$   
 ist für alle  $\kappa$  topologisch  $(2n-1)$ -  
 dimensional. ( $f_{\kappa}$  heißt randdefinierend)

Definition 6 : Sei  $X$  ein normaler komplexer Raum,  
 $A$  ein Gebiet in  $X$ ,  $R$  eine Teilmenge  
 des Randes  $\partial A$  von  $A$ , dann heißt  
 $R$  Radó'sches Randstück, wenn gilt:  
 Ist  $f$  irgendeine holomorphe Funktion  
 in  $A$ , die auf allen Folgen, die gegen  
 Punkte von  $R$  konvergieren, gegen Null  
 strebt, so verschwindet  $f$  in  $A$  identisch.

Definition 7 : Sei  $A$  ein analytisches Polyedergebiet  
 im  $\mathbb{C}^n$  mit definierenden Funktionen  
 $f_1, \dots, f_k$ .

a) Eine Teilmenge  $K$  des Randes von  $A$   
 heißt dann Kante von  $A$ , wenn es zu  $z \in K$  einen  
 Punkt  $z' \in K$  gibt, eine Umgebung  $V$  von  $z'$   
 mit  $z \in \bar{V}$  und  $A$  definierende Funktionen  
 $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_s}$ , die in  $z'$  eine Funktional-  
 matrix mit maximalem Rang haben, so daß  $K$

in  $\bar{V}$  folgendermaßen beschreibbar ist:

$$K \cap \bar{V} = \{z \in \partial A \cap \bar{V} : |f_{\lambda_1}(z)| = \dots = |f_{\lambda_s}(z)| = 1\}$$

$f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_s}$  heißen dann  $K$  in  $\bar{V}$

beschreibende Funktionen.

b) Die durch  $z \mapsto (f_{\lambda_1}(z), \dots, f_{\lambda_s}(z))$

gegebene Abbildung  $\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}^s$  heißt

$K$  beschreibende Abbildung. Existiert zu  $\phi$

eine maximale Abbildung  $\psi$  von  $A$  in die

zugehörige komplexe Basis  $B$ , so heißt  $\psi$

die durch  $K$  gegebene maximale Abbildung

und  $B$  die durch  $K$  gegebene komplexe Basis.

Definition 8 : Sei  $A$  ein analytisches Polyedergebiet im  $\mathbb{C}^n$ .

a) Eine Kante  $K$  von  $A$  heißt volle Kante, wenn gilt:

Zu  $z \in K$  gibt es  $K$  beschreibende Funktionen

$f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_s}$  ( $s < n$ ), so daß jede Auswahl

$f_{\lambda_{i_1}}, \dots, f_{\lambda_{i_\sigma}}$ , nur dann mit anderen

A-definierende Funktionen eine Funktionalmatrix mit nicht maximalem Rang in  $A$  hat, wenn schon eine Funktion  $f_{\lambda_{ij}}$  mit diesen Funktionen eine Funktionalmatrix mit nicht Außerdem habe die  $K$  beschreibende Abbildung  $\phi$  überall maximalen geometrischen Rang.

(Insbesondere existiert zu  $\phi$  eine komplexe Basis  $B$ )

Bemerkung: Jede durch eine Hyperfläche gegebene Kante und jede Kante eines Bishop'schen Polyedergebiets ist eine volle Kante.

b) Sind  $K_1, \dots, K_t$  volle Kanten von  $A$ , so bilden sie ein ausgezeichnetes Kantensystem von  $A$ , wenn gilt:

1) Zwei Funktionen, die verschiedene Kanten  $K_i, K_j, i, j \in \{1, \dots, t\}$ , beschreiben, sind nicht äquivalent,

2) zu  $z \in \bigcup_{\tau=1}^t K_\tau$  und  $1 \leq \tau \leq t$  gibt es paarweise von den  $K_\tau$  in  $z$  beschreibenden Funktionen abhängige Funktionen, deren Funktionalmatrix in  $z$  maximalen Rang hat.

3) Sei  $\phi$  beschreibende Abbildung einer Kante  $K_\tau$  und  $\phi'$  einer beliebigen Kante  $K'$  von  $A$ . Aus  $\text{rg}(\phi, \phi') < \text{rg}(\phi) + \text{rg}(\phi')$  folgt, daß  $K'$  Durchschnitt von Kanten  $K_{\tau_1}, \dots, K_{\tau_s}$  ist und  $\text{rg}(\phi, \phi') = \text{rg}(\phi')$  gilt.

4) Zu jeder  $A$  definierenden Funktion  $f_i$  gibt es eindeutig ein  $\tau \in \{1, \dots, t\}$ , so daß  $f_i$  zu den  $K_\tau$  beschreibenden Funktionen gehört.

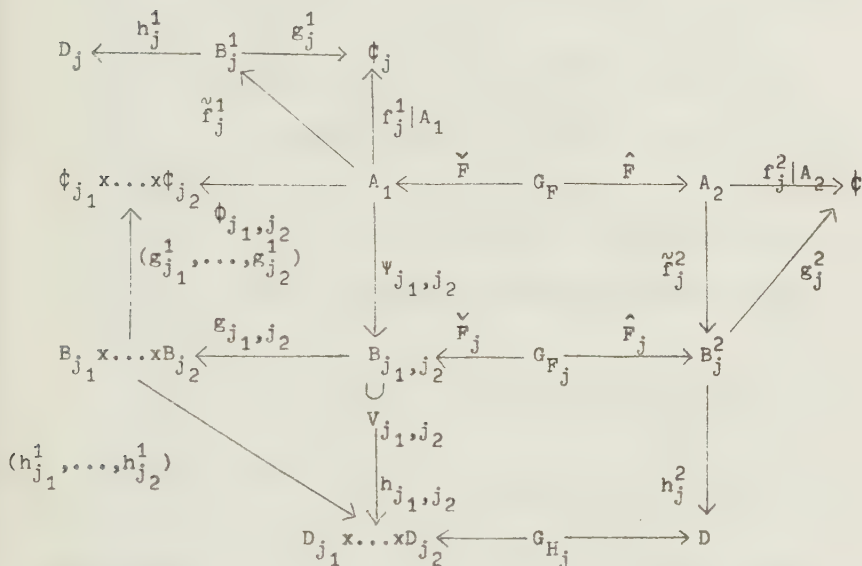
Bemerkung: Da zwei Kanten eines ausgezeichneten Systems keine äquivalenten beschreibenden Funktionen haben können, kann für die Bezeichnung stets angenommen werden, daß die  $A$  definierenden Funktionen so durchnummeriert sind, daß jede Kante des Systems durch Funktionen mit lückenlos aufsteigenden Indizes beschrieben wird. Wird darauf Bezug genommen, so wird eine Kante durch den kleinsten und den größten Index der sie beschreibenden Funktionen charakterisiert:

$$K_{\kappa_1, \kappa_2} := \{z \in \partial A : |f_{\kappa_1}(z)| = |f_{\kappa_1+1}(z)| = \dots = |f_{\kappa_2}(z)| = 1\}$$

Definition 9 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  und  $\mathbb{C}^{n_2}$ , und sei  $F : A_1 \longrightarrow A_2$  eine holomorphe Korrespondenz mit konstanter Faserdimension.

- a) Ist  $K$  eine Kante von  $A$ , dann heißt  $F$  auf  $K$  kanteneigentliche Korrespondenz, wenn gilt:
- 1) Die Projektion  $\hat{F} : G_F \longrightarrow A_2$  des Graphen  $G_F$  von  $F$  auf  $A_2$  ist surjektiv.
  - 2)  $F$  ist in allen Punkten von  $K$  randeigentlich. (Dabei soll eine Korrespondenz  $F : A_1 \longrightarrow A_2$  zwischen einem Gebiet  $A_1 \subset \mathbb{C}^n$  und einem topologischen Raum  $A_2$  randeigentlich in einem Punkt  $z^1 \in \partial A_1$  heißen, wenn es zu jeder kompakten Menge  $M$  aus  $A_2$  eine Umgebung  $V$  von  $z^1$  gibt, so daß  $V \cap F^{-1}(M) = \emptyset$  gilt.)
- b) Eine auf allen Kanten eines ausgezeichneten Systems kanteneigentliche Korrespondenz  $F$  heißt vollkanteneigentlich, wenn es zu jedem Punkt  $z^2 \in \partial A_2$  Punkte  $z^{2,v} \in A_2$  gibt, die nur  $z^2$  als Häufungspunkt haben, so daß  $F^{-1}(\{z^{2,v}, v = 1, 2, \dots\})$  mindestens einen Häufungspunkt auf  $\bigcup_{\tau=1}^t K_\tau$  hat.
- Die Kanten  $K_1, \dots, K_t$  bilden dann ein bezüglich  $F$  ausgezeichnetes Kantensystem.

Schema der im Folgenden wiederholt auftretenden Abbildungen  
und Bezeichnungen.



Dabei sind:

- 1)  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\phi^{n_1}$  und  $\phi^{n_2}$ .
- 2)  $G_F$  der Graph einer holomorphen Korrespondenz  
 $F : A_1 \longrightarrow A_2$ .
- 3)  $f_j^i|_{A_1}$  definierende Funktionen für  
 $i = 1, 2; j = 1, \dots, k_1$ .

- 4)  $B_j^i$  die komplexen Basen zu  $f_j^i|_{A_1}$ .
- 5)  $\tilde{f}_j^i : A_1 \longrightarrow B_j^i$  zu  $f_j^i|_{A_1}$  maximale Abbildungen.
- 6)  $g_j^i (\in \mathcal{O}(B_j^i))$  gegeben durch  $f_j^i|_{A_1} = g_j^i \circ \tilde{f}_j^i$
- 7)  $\phi_{j_1, j_2} : A_1 \longrightarrow \phi^{j_2 - j_1 + 1}$  gegeben durch  

$$z^1 \longmapsto (f_{j_1}^1(z^1), f_{j_1+1}^1(z^1), \dots, f_{j_2}^1(z^1))$$
eine Kante  $K_{j_1, j_2}$  beschreibende Abbildung.
- 8)  $B_{j_1, j_2}$  die komplexen Basen zu  $\phi_{j_1, j_2}$ .
- 9)  $\psi_{j_1, j_2} : A_1 \longrightarrow B_{j_1, j_2}$  zu  $\phi_{j_1, j_2}$  maximale Abbildung.
- 10)  $g_{j_1, j_2}$  gegeben durch  $(\tilde{f}_{j_1}^1, \dots, \tilde{f}_{j_2}^1) = g_{j_1, j_2} \circ \psi_{j_1, j_2}$
- 11)  $h_j^i$  die nach Hilfssatz 6 und einem Satz von Ahlfors (siehe Lit. 1) existierende Überlagerungsabbildung der berandeten Riemannschen Flächen  $B_j^i$  auf den Einheitskreis  $D$ .

- 12)  $h_{j_1 j_2}$  die nach Hilfssatz 13 existierende holomorphe und eigentliche Abbildung einer offenen Halbumgebung  $V_{j_1 j_2}$  einer Teilmenge des Randes von  $B_{j_1 j_2}$ .
- 13)  $G_{F_j}$  ist der Graph einer holomorphen Korrespondenz  $F_j : B_{j_1 j_2} \longrightarrow B_j$  für  $(j_1, j_2, j)$  wie in Hilfssatz 12.)
- 14)  $G_{H_j}$  ist der Graph einer holomorphen Korrespondenz von einer in  $D^{j_2 - j_1 + 1}$  offenen Halbumgebung von  $T^{j_2 - j_1 + 1}$  in  $D$ .

Hilfssatz 1 : Seien  $X_1, X_2$  irreduzible, reduzierte komplexe Räume, sei  $X_1$  normal,  $F : X_1 \dashrightarrow X_2$  eine irreduzible holomorphe Korrespondenz,  $F$  surjektiv,  $g$  eine holomorphe Funktion in  $X_2$ , dann gibt es ein irreduzibles Polynom

$$P(\zeta; x^1) = \zeta^{n+} \sum_{p=0}^{n-1} \zeta^p A_p(x^1)$$

über dem Ring  $\mathcal{O}(X_1)$  oder in  $X_1$  holomorphen Funktionen derart, daß

$$P(g(x^2); x^1) = 0 \quad \text{für} \quad (x^1, x^2) \in G_F.$$

Ist die Funktion  $g$  in  $X_2$  beschränkt, so sind alle Koeffizientenfunktionen  $A_p$  in  $X_1$  beschränkt.

Beweis:

Die Funktion  $g$  wird als holomorphe Funktion in der Normalisierung  $G_F^*$  des Graphen  $G_F$  aufgefaßt.  $G_F^*$  ist in natürlicher Weise  $X_1$  analytisch verzweigt und endlichblättrig überlagert, so daß sich diese Funktion nach einer bekannten Schlußweise (vgl. Lit. 7, Satz 12) als Polynom mit Koeffizienten in  $X_1$  darstellen läßt.

Hilfssatz 2 : Es sei  $A$  ein Gebiet des  $\mathbb{C}^n$  und

$$P(\zeta; z) = \zeta^m + \sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta^\mu B_\mu(z)$$

ein über dem Ring  $\mathcal{O}(A)$  der in  $A$  holomorphen Funktionen irreduzibles Polynom. Ist die Resultante

$$\mathcal{R} \left( P(\zeta; z), \frac{\partial}{\partial z_1} P(\zeta; z) \right)$$

identisch 0 in  $A$ , so sind die Koeffizienten  $B_\mu$  sämtlich von der ersten Koordinate  $z_1$  unabhängig.

Beweis:

Ist  $M \subset A$  die Nullstellmenge der Diskriminante von  $P$  (genau dort hat  $P$  mehrfache Wurzeln), so zerfällt  $P$  außerhalb  $M$  in jeder einfach zusammenhängenden, offenen Menge  $U \subset A : P(\zeta ; z) = \prod_{\mu=1}^m (\zeta - \zeta_{\mu}(z))$  wobei  $\zeta_{\mu}$  lauter verschiedene holomorphe Funktionen in  $U$  sind. Dort gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} P(\zeta ; z) = - \sum_{\mu=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \zeta_{\mu}(z) \prod_{\nu \neq \mu} (\zeta - \zeta_{\nu}(z)) \right).$$

$P$  und  $\frac{\partial}{\partial z_1} P$  haben nach Voraussetzung eine gemeinsame

Wuzel  $\zeta_{\mu_0}$  und für diese folgt  $\frac{\partial}{\partial z_1} \zeta_{\mu_0} = 0$ .

Durch Fortsetzung von  $\zeta_{\mu_0}$  in  $A \setminus M$  läßt sich wegen der Irreduzibilität von  $P$   $\zeta_{\mu_0}$  in jede andere Wurzel überführen. Dabei bleibt die partielle Abteilung nach  $z_1$  identisch 0. Die Wurzeln und damit die Koeffizienten von  $P$  sind also in  $A \setminus M$  von  $z_1$  unabhängig.

Daraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz 3 : Seien  $A_1, A_2$  beschränkte Gebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  und  $\mathbb{C}^{n_2}$ , mit  $n_1 \geq n_2$ . Sei  $A_1 = B \times B'$  und  $p : A_1 \longrightarrow B$  die Projektion auf den ersten Faktor,  $F : A_1 \dashrightarrow A_2$  eine holomorphe Korrespondenz. Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:

1) Es gibt  $l$  Funktionen  $g_\lambda \in \mathcal{O}(A_2) \cap \mathcal{L}(\overline{A_2})$ ,  $\lambda = 1, \dots, l$ , die holomorph in  $A_2$  und stetig in der abgeschlossenen Hülle  $\overline{A_2}$  von  $A_2$  sind und irreduzible Polynome  $Q_\lambda$  über  $\mathcal{O}(A_1)$  mit höchstem Koeffizient 1 und

$$Q_\lambda (g_\lambda \circ \hat{F} ; \check{F}) \mid G_F = 0 .$$

2) Es gibt Gebiete  $G_j \subset \mathbb{C}^l$  mit einfachen Randstücken  $E \bigwedge_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) charakterisiert durch Indexmengen

$$\bigwedge_j = \{\lambda_1^j, \dots, \lambda_{l_j}^j\} \subset \{1, \dots, l\},$$

3) Es gibt auf dem Rand  $\partial B$  des Gebiets  $B$  ein Radó'sches Randstück  $R$ ,  
mit folgender Eigenschaft:

Für jede Folge  $((b_\nu))$  mit  $b_\nu \in B$   
und Häufungspunkten nur in  $R$  gibt es zu  
jedem Punkt  $z_0^2 \in \partial \{F(\{(b_\nu, 'z), \nu = 1, \dots\})\}$   
mit  $'z \in B$  eine Indexteilmenge  $\Lambda_j$ , -  
wie unter "2)" aufgeführt -, so daß die  
Abbildung  $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j} : \overline{A_2} \longrightarrow \mathbb{C}^{l_j}$  den  
Punkt  $z_0^2$  in  $E_{\Lambda_j}$  abbildet.

Dann gilt:

Es gibt eine Indexmenge  $\Lambda_{j_0}$   
- unter den bei "2)" aufgeführten - so daß die  
Abbildung

$$(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{j_0}} \circ \hat{F} : G_F \longrightarrow \mathbb{C}^{l_{j_0}}$$

strikt abhängt von der Projektion

$$p \circ \check{F} : G_F \longrightarrow B.$$

**Beweis:**

a) Sei  $((b_\nu))$  eine Folge von Punkten  $b_\nu \in B$  und mit

Häufungspunkten nur in  $R$ . Dann bildet jede Koeffizientenfunktion jeden Polynoms  $Q_\lambda$  auf diesen Punkten eine normale Familie von in  $B'$  holomorphen Funktionen. Es gibt eine Teilfolge  $((\tilde{b}_v))$  der Folge  $((b_v))$ , so daß jede Funktionenfamilie in  $B'$  kompakt konvergiert. Es gibt also Polynome  $\tilde{Q}_\lambda$  über  $\mathcal{O}(B')$ , so daß

$Q_\lambda(\zeta; (\tilde{b}_v, 'z))$  gegen  $Q_\lambda(\zeta; 'z)$  kompakt in  $B'$  konvergieren für  $\lambda = 1, \dots, \ell$ . ( $z^1 = (b, 'z)$  für

$$z^1 \in A_1, b \in B, 'z \in B')$$

Sei  $M'$  die Vereinigung aller Nullstellenmengen der Diskriminanten der Polynome  $Q_\lambda$ , so zerfallen alle  $Q_\lambda$  außerhalb von  $M'$  in jeder einfach zusammenhängenden offenen Punktmenge  $U' \subset B'$ :

$$\tilde{Q}_\lambda(\zeta, 'z) = \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} (\zeta - \tau_\mu^\lambda('z))$$

mit in  $U'$  holomorphen Funktionen  $\tau_\mu^\lambda$ .

b) Sei  $z_0^2 \in \partial F\{(b_v, 'z_0), v = 1, 2, \dots\}$  so gewählt, daß

$$\tilde{Q}_\lambda(g_\lambda(z_0^2); 'z_0) = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, \dots, \ell.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu  $z_0^2$  ein einfaches Randstück

$E_{\Lambda_j}$ , so daß

$$(g_\lambda(z_0^2))_{\lambda \in \Lambda_j} \in E_{\Lambda_j}.$$

Ist  $'z_0 \in U'$  so gibt es eine Indexkombination  $\{\mu_\lambda : \lambda \in \Lambda_j\}$  so daß

$$(\tau_\lambda^{\mu_\lambda} ('z_0))_{\lambda \in \Lambda_j} \in E_{\Lambda_j}.$$

Da nur endlich viele Indexkombinationen  $\{\mu_\lambda : \lambda \in \Lambda_j\}$  und nur endlich viele Teilmengen  $\Lambda_j$  von  $\{1, \dots, l\}$  möglich sind, gibt es ein  $\Lambda_{j_0}$  und eine Indexkombination  $\{\tilde{\mu}_\lambda : \lambda \in \Lambda_{j_0}\}$ , so daß sogar das Bild von  $U'$  vermöge der Abbildung

$$(\tau_\lambda^{\tilde{\mu}_\lambda})_{\lambda \in \Lambda_{j_0}} : U' \longrightarrow \mathbb{C}^{l_{j_0}} \text{ ganz in } E_{\Lambda_{j_0}} \text{ liegt.}$$

Da  $E_{\Lambda_{j_0}}$  aber einfaches Randstück war, ist  $(\tau_\lambda^{\tilde{\mu}_\lambda})_{\lambda \in \Lambda_{j_0}}$  in  $U'$  konstant. Das bedeutet, daß alle  $Q_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda_{j_0}$ , in  $B'$  eine konstante Wurzel haben. Und damit gilt in  $B'$ :

$$\mathcal{R}(Q_\lambda ; \frac{\partial}{\partial 'z_v} Q_\lambda) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda_{j_0} \text{ und für alle}$$

Koordinaten  $'z$  von  $B'$ .

c) Hieraus folgt, daß für alle  $\lambda \in \Lambda_{j_0}$  die Resultanten

$$\mathcal{R}(Q_\lambda(\tau ; (\tilde{b}_v, 'z)) ; \frac{\partial}{\partial 'z_v} Q_\lambda(\tau ; (\tilde{b}_v, 'z)))$$

für alle Koordinaten  $'z_v$  von  $B'$  kompakt in  $B'$  gegen 0 konvergieren.

d) Für jede Folge  $((b_v))$  mit  $b_v \in B$  und  
 $\exists \{b_v, v = 1, 2, \dots\} \in R$  folgt nun aber, daß die in  
 $B \times B'$  holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ (v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_m}) \end{aligned} \quad := \quad \prod_{\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}} \mathcal{R}(Q_{\lambda_i}; \frac{\partial}{\partial' z_{v_{\lambda_i}}} Q_{\lambda_i})$$

für alle Indexkombinationen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  mit  $\lambda_j \in \Lambda_j$   
 und  $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_m}$  für die  $'z_{v_{\lambda_j}}$  Koordinatenfunktion von  
 $B'$  ist, alle gegen den Wert 0 konvergieren. (Zu jeder  
 Teilfolge gibt es eine Teilfolge, für die mindestens ein  
 Faktor jeden Produkts gegen 0 konvergiert, während alle  
 übrigen Faktoren beschränkt bleiben.)

e) Da  $R$  ein Radó'sches Randstück ist, ist jede Funktion

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ (v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_m}) \end{aligned}$$

in  $A_1$  identisch 0.

Nun muß aber jeweils ein Faktor identisch verschwinden. Deshalb  
 gibt es eine Indexmenge  $\Lambda_{j_0}$ , so daß alle Resultanten

$\mathcal{R}(Q_\lambda; \frac{\partial}{\partial' z_v} Q_\lambda)$  für  $\lambda \in \Lambda_{j_0}$  und für alle Koordinaten  
 $'z_v$  von  $B'$  in  $A_1$  verschwinden.

f) Nach Hilfssatz 2 können wir nun folgern, daß in  $A_1$  alle Koeffizienten von  $Q_\lambda$ , für  $\lambda \in \wedge_{j_0}$ , nur von den Koordinaten von  $B$  abhängen.

g) Die in  $G_F$  holomorphe Abbildung  $(g_\lambda)_{\lambda \in \wedge_{j_0}^0} \hat{F}$  ist also strikt abhängig von der Abbildung  $p \circ \check{F}$ .

Hilfssatz 4 : Seien  $A_1, A_2$  Gebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  und  $\mathbb{C}^{n_2}$ ,  
 sei  $F : A_1 \longrightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe  
 Korrespondenz mit surjektiver Projektion  
 $\check{F} : G_F \longrightarrow A_1$ , und zu einem Punkt  $z_0^1$  auf  
 dem Rand  $\partial A_1$  sei eine Umgebung  $V$   
 von  $z_0^1$  vorgegeben,  
 dann gibt es eine irreduzible, holomorphe Korres-  
 pondenz

$$\check{F} : A_1 \cap V \longrightarrow A_2 \text{ mit } G_{\check{F}} \subset G_F \cap (V \times A_2),$$

und zu jeder in  $A_2$  holomorphen Funktion  $g$  ein  
 irreduzibles Polynom  $P$  über  $\mathcal{O}(A_2)$  und ein  
 irreduzibles Polynom  $Q$  über  $\mathcal{O}(A_1 \cap V)$ , so daß  
 $Q \mid P$  teilt und

$$P(g \circ \hat{F} ; \check{F})|_{G_F} = 0 ; \quad Q(g \circ \hat{F}|_{G_F} ; \check{F}|_{G_{\check{F}}})|_{G_{\check{F}}} = 0$$

gilt.

Beweis:

a)  $G_{\tilde{F}}$  sei eine irreduzible Komponente von

$G_{\tilde{F}} \cap \tilde{F}^{-1}(V) \cdot \tilde{F}|_{\tilde{F}^{-1}(V)}$  bildet eigentlich und surjektiv auf  $V$  ab. Deshalb ist auch  $\tilde{F}|_{G_{\tilde{F}}}$  eine eigentliche, surjektive und holomorphe Abbildung in  $V$ .

b) Nach Hilfssatz 1 gibt es zu jeder in  $A_2$  holomorphen Funktion  $g$  ein irreduzibles Polynom  $P \in \mathcal{O}(A_1)[\zeta]$ , so daß  $P(g \circ \hat{F}; \tilde{F})|_{G_{\tilde{F}}} = 0$  gilt.

c) Es gibt eine mindestens 1-codimensionale analytische Menge  $M \subset A_1$  derart, daß die Abbildung

$\tilde{F} : G_{\tilde{F}} \setminus \tilde{F}^{-1}(M) \longrightarrow A_1 \setminus M$  lokal topologisch ist. (Als  $M$  wählt man die Vereinigung einer kritischen Menge der analytischen Überlagerung  $\tilde{F} \circ u : G_{\tilde{F}}^* \longrightarrow A_1$  und des Bildes der Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von  $G_{\tilde{F}}$  bei  $\tilde{F}$ .)

Es sei  $U$  eine einfache zusammenhängende offene Teilmenge von  $(A_1 \cap V) \setminus M$ . Es gibt dann eine holomorphe Abbildung

$\Psi : U \longrightarrow G_{\tilde{F}}$  derart, daß  $\tilde{F} \circ \Psi : U \xrightarrow{\tilde{F}^{-1}} \tilde{F}^{-1}(U) \longrightarrow U$

die identische Abbildung der Menge  $U$  ist. Die in  $U$  holomorphe Funktion  $\zeta(z^1) = g \circ \hat{F} \circ \Psi(z^1)$  ist dann eine Wurzel des Polynoms  $P$  in  $U$ .  $\zeta$  läßt sich unbeschränkt fortsetzen in  $(A_1 \cap V) \setminus M$ . Man zeigt nun leicht mit der üblichen Methode daß die Funktion  $\zeta$  und ihre Fortsetzungen genau den Wurzeln eines über  $\mathcal{O}(A_1 \cap V)$  irreduziblen Faktors  $Q$  von  $P$  bilden.

Die analytischen Fortsetzungen der Funktion  $\zeta$  von einem Punkt von  $V$  aus ergibt, daß jeder Punkt  $z^1$  der Menge  $(A_1 \cap V) \setminus M$  einen Bildpunkt  $z^2$  vermöge  $F$  besitzt, so daß  $Q(g(z^2); z^1) = 0$  und  $z^2 \in F(z^1)$  gilt. Ist  $z^1 \in A_1 \cap V \cap M$ , so ist es möglich, eine Punktfolge  $((z_p^1))$  der Menge  $(A_1 \cap V) \setminus M$  so zu wählen, daß sie gegen  $z^1$  konvergiert. Da  $\check{F} / G_{\check{F}}$  eigentlich ist, gibt es auch einen Urbildpunkt  $(z^1, z^2) \in G_{\check{F}}$  mit  $Q(g(z^2); z^1) = 0$ .

§ 1 Holomorphe Überlagerungskorrespondenzen zwischen Gebieten im  $\mathbb{C}^n$ .

Satz 1 : (Rischel, vgl. Lit. 14 Satz 1)

Seien  $A_\sigma, B_\tau$  Gebiete im  $\mathbb{C}^m_\sigma$  und  $\mathbb{C}^n_\tau$  mit einfachen Rändern,  $\sigma = 1, \dots, s$ ;  $\tau = 1, \dots, t$ .

Sei

$$A := \bigcap_{\sigma=1}^s A_\sigma, \quad B := \bigcap_{\tau=1}^t B_\tau$$

$F : A \longrightarrow B$  eine irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenz, seien  $p_\sigma^1, p_\tau^2$  die Projektion von  $A$  bzw.  $B$  in  $A_\sigma$  bzw.  $B_\tau$ , dann gilt, daß bei geeigneter Numerierung je zwei Abbildungen  $p_\sigma^1 \circ \check{F}$  und  $p_\tau^2 \circ \hat{F}$  im engeren Sinn verwandt sind.

Insbesondere ist  $s = t$  und  $m_\sigma = n_\sigma$  für  $\sigma = 1, \dots, s$ .

Beweis:

Man wendet Hilfssatz 3 an, indem man setzt:

$$A_1 = A_{\sigma_0} \times \bigcap_{\sigma \neq \sigma_0} A_\sigma$$

die Koordinatenfunktionen von  $B$  als Funktionen  $g_\lambda$  in "1)",

so daß  $\{g_\lambda : \lambda \in \bigwedge_j\}$  die Koordinatenfunktionen von jeweils einem Faktor  $B_j$  sind, wähle man die Indexmengen  $\bigwedge_j$  in "2)", die einfachen Randstücke  $\partial B_j$  stehen dann für  $E \bigwedge_j$ .

Als Radó'sches Randstück nehme man  $\partial A_{\sigma_0}$  in "3)".

Die Voraussetzung "4)" ist wegen der Eigentlichkeit von  $\hat{F}$  erfüllt.

Es gibt daher eine Projektion  $p_{\tau_0}^2$ , so daß  $p_{\tau_0}^2 \circ \hat{F}$  von  $p_{\sigma_0}^1 \circ \check{F}$  strikt abhängt.

Dies ist für alle  $\sigma = 1, \dots, s$  der Fall. Die Symmetrie von  $A$  und  $B$  in den Voraussetzungen des Satzes liefert nun aber die Behauptung.

Satz 2 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^n$ , sei  $F : A_1 \rightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenz, so gibt es zu jeder  $A_1$  definierenden Funktion  $f_{\kappa}^1$  eine  $A_2$  definierende Funktion  $f_{\kappa}^2$ , so daß  $f_{\kappa}^1 \circ \check{F}$  im engeren Sinn verwandt ist mit  $f_{\kappa}^2 \circ \hat{F}$ . Die maximale Anzahl von paarweise in  $A_1$  unabhängigen Funktionen unter  $f_1^1, \dots, f_{k_1}^1$  ist gleich der maximalen Anzahl von in  $A_2$  paarweise unabhängigen Funktionen unter  $f_1^2, \dots, f_{k_2}^2$ .

Beweis:

Wegen Hilfssatz 4 kann man Hilfssatz 3 anwenden:

In der Umgebung  $V$  eines Punktes  $z_0^1 \in \partial A_1$  mit

$|f_{\kappa_0}^1(z_0^1)| = 1$  und  $df_{\kappa_0}^1(z_0^1) \neq 0$  - ohne Einschränkung sei

dann  $\frac{\partial}{\partial z_1} f_{\kappa_0}^1(z_0^1) \neq 0$  - ist die Abbildung

$\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ , definiert durch

$(z_1^1, \dots, z_n^1) \mapsto (f_{\kappa_0}^1(z_1^1), z_2^1, \dots, z_n^1)$ , biholomorph.

$A_1 \cap V$  ist dann also biholomorph äquivalent zu

$\{z \in \varphi(A_1 \cap V) : |z_1| < 1\}$ . Bei geeigneter Wahl von  $V$  zerfällt

$\varphi(A_1 \cap V)$  in ein direktes Produkt  $B \times B'$  mit

$B := \{z_1 : |z_1| < 1 \text{ und } z_1 \in f_{\kappa_0}^1(A_1 \cap V)\}$ ,

$B' := \{(z_2, \dots, z_n) : z \in \varphi(A_1 \cap V)\}$ .

Die Voraussetzungen zu Hilfssatz 3 sind nun erfüllt, wenn man setzt:

$$A_1 = B \times B',$$

die  $A_2$  definierende Funktionen  $f_{\kappa}^2$  als Funktionen

$g_{\lambda}$  in "1)",  $Q_{\lambda}$  wie man sie aus Hilfssatz 4 erhält,

in "2)"  $\bigwedge_{\kappa} = \{\kappa\}$ , als einfache Randstücke  $E_{\bigwedge_{\kappa}}$  hat man

dann Teile des Randes des Einheitskreises.

Als Radó'sches Randstück nehme man das Randstück von

$\partial B$  mit  $|z_1| = 1$  in "3)".

Die Voraussetzung "4)" ist wegen der Eigentlichkeit von  $\hat{F}$  erfüllt. Bilder von Randpunkten in  $\bar{A}_1$  können nur auf Randpunkten in  $\bar{A}_2$  liegen.

Nach Hilfssatz 3 gilt also, daß zu  $f_{\kappa_0}^1$  eine Funktion  $f_{\kappa_0}^2$  existiert, so daß  $f_{\kappa_0}^2 \circ \hat{F}|_{G_F}$  von  $f_{\kappa_0}^1 \circ \check{F}|_{G_F}$  strikt abhängt.

Nach Hilfssatz 4 sind die Polynome  $Q_{\kappa_0}$  Teiler der über ganz  $A_1$  definierten und irreduziblen Polynome  $P_{\kappa_0}$ .

Mit den Koeffizientenfunktionen von  $Q_{\kappa_0}$ , die in  $A_1 \cap V$  von  $f_{\kappa_0}$  strikt abhängen, hängen daher auch die Koeffizientenfunktionen von  $P_{\kappa_0}$  strikt von  $f_{\kappa_0}^1$  ab. Also hängt auch  $f_{\kappa_0}^2 \circ \hat{F}$  von  $f_{\kappa_0}^1 \circ \check{F}$  strikt ab.

Diese Aussage erhält man für alle  $\kappa = 1, \dots, k_2$ .

Wegen der Symmetrie zwischen  $A_1$  und  $A_2$  folgt daraus die Behauptung des Satzes.

Satz 3 : Seien  $A_1, A_2$  Normalgebiete im  $\phi^n$ ,

sei  $F : A_1 \rightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenz, so gibt es zu jeder randdefinierenden Funktion  $f_{\kappa}^1$  von  $A_1$  eine randdefinierende Funktion  $f_{\kappa}^2$  von  $A_2$ , so daß  $f_{\kappa}^1 \circ \check{F}$

und  $f_{\kappa}^2, o \hat{F}$  im engeren Sinn verwandt sind.

Die Anzahl der paarweise in  $A_1$  unabhängigen Funktionen unter  $f_1^1, \dots, f_{\kappa_1}^1$  ist gleich der Anzahl, der in  $A_2$  paarweise unabhängigen Funktionen unter  $f_1^2, \dots, f_{\kappa_2}^2$ .

Beweis:

Der Rand von  $A_i$  sei beschrieben durch

$$\partial A_i = E^i \cup \bigcup_{\kappa=1}^{K_i} \{z^i : r_{\kappa}^i(z^i) \in E_{\kappa}^i\} \cup \bigcup_{\sigma=1}^{S_i} \{z^i : l_{\sigma}^i(z^i) = 0\}$$

Ist  $s_1 = s_2$ , so ist nichts mehr zu beweisen. Der Beweis zu Satz 3 lautet dann wörtlich wie zu Satz 2.

Andernfalls kann man analog verfahren, man benötigt nur die Aussage von Hilfssatz 3 in erweiterter Form:

Die Behauptung von Hilfssatz 3 gilt, wenn die Voraussetzungen ergänzt werden:  $F$  sei irreduzibel,  $\check{F}, \hat{F}$  surjektiv und  $\check{F}$  eigentlich, unter den Funktionen  $g_{\lambda}$  in "1)" seien  $g_1, \dots, g_{n_2}$  die Koordinatenfunktionen von  $A_2$ , und statt "4)" gesetzt wird:

4 a) Es gibt in einer Umgebung  $U_2$  von  $A_2$  holomorphe, nicht konstante Funktionen  $l_{\sigma}, \sigma = 1, \dots, s$ ,

so daß gilt: Für jede Folge  $((b_v))$  mit  $b_v \in B$  und Häufungspunkten nur in  $R$  gibt es zu jedem Punkt  $z_0^2 \in \partial \{F(\{(b_v, 'z), v = 1, 2, \dots\})\}$  eine Indexteilmenge  $\mathcal{A}_j$ , - wie unter "2)" aufgeführt -, so daß die Abbildung  $(g_\lambda)_\lambda \in \mathcal{A}_j : A_2 \longrightarrow \phi^j$  den Punkt  $z_0^2$  in  $E_{\mathcal{A}_j}$  abbildet, oder es gibt ein  $\sigma$ , so daß  $l_\sigma^2(z_0^2) = 0$  ist.

Die Beweispunkte "a)", "f)", "g)" des Beweises zu Hilfssatz 3 bleiben wörtlich erhalten. Die Punkte "b)", "c)", "d)" und "e)" müssen modifiziert werden und lauten jetzt:

b') Sei  $z_0^2 \in \partial \{F(\{(b_v, 'z_0), v = 1, 2, \dots\})\}$  so gewählt, daß  $Q_\lambda(g(z_0^2); 'z_0) = 0$ . Nach Voraussetzung "4a)" gibt es zu  $z_0^2$  entweder ein einfaches Randstück  $E_{\mathcal{A}_j}$ , so daß  $(g(z_0^2))_\lambda \in \mathcal{A}_j \in E_{\mathcal{A}_j}$  oder eine Funktion  $l_{\sigma_0}$ , so daß  $l_{\sigma_0}(z_0^2) = 0$ .

Ist  $'z_0 \in U$ , so gibt es also entweder eine Indexkombination  $\{\mu_\lambda : \lambda \in \mathcal{A}_j\}$ , so daß

$(\tau_\lambda^{\mu_\lambda}('z_0))_\lambda \in \mathcal{A}_j \in E_{\mathcal{A}_j}$  oder es ist  $l_{\sigma_0}(\tau_{n_1}^{\mu_1}, \dots, \tau_{n_2}^{\mu_{n_2}}) = 0$

für eine Indexkombination  $(\mu_1, \dots, \mu_{n_2})$ .

Da  $(\zeta_1^{\mu_1}, \dots, \zeta_{n_2}^{\mu_{n_2}}) : U' \longrightarrow \mathbb{C}^{n_2}$  holomorph ist, kann

die Menge  $\{z \in U' : l_{\sigma}(\zeta_1^{\mu_1}, \dots, \zeta_{n_2}^{\mu_{n_2}}) = 0\}$  nur

analytisch in  $U'$  sein. Sie umfaßt also entweder  $U'$  oder ist mindestens 1-codimensional. Deshalb kann man analog wie im Beweis zu Hilfssatz 3 schließen, daß gilt:

In  $B'$  ist entweder

$$\mathcal{R}(\tilde{Q}_{\lambda} ; \frac{\partial}{\partial z_v} \tilde{Q}_{\lambda}) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \Lambda_{j_0}, \text{ oder für ein } \sigma_0$$

gibt es zu jedem Punkt  $z \in B'$  einen Punkt

$$z^2 \in \partial\{F(\{(b_v, z), v = 1, 2, \dots\})\} \text{ mit } l_{\sigma_0}(z^2) = 0.$$

c') Aus "b)" kann man folgern, daß entweder für alle

$\lambda \in \Lambda_{j_0}$  die Resultante

$$\mathcal{R}(Q_{\lambda}(z; (b_v, z)); \frac{\partial}{\partial z_v} Q_{\lambda}(z; (b_v, z)))$$

für alle Koordinationen  $z_v$  von  $B'$  kompakt in  $B'$  gegen Null konvergiert, oder für ein  $\sigma_0$  gibt es zu jedem Punkt

'z  $\in$  B' einen Punkt

$z^2 \in \partial \{F(b_v, 'z), v = 1, 2, \dots\}\}$  mit  $1_{\sigma_0}(z^2) = 0$ .

d') Für jede der in  $G_F$  holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &:= \prod_{\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}} \mathcal{R}(Q_{\lambda_i}; \frac{\partial}{\partial z_{v_{\lambda_i}}} Q_{\lambda_i}) \prod_{\sigma=1}^s 1_{\sigma} \circ \hat{F} \\ (v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_m}) & \end{aligned}$$

und für jeden Punkt von  $R$  gibt es mindestens einen über  $x$  gelegenen Punkt von  $\partial A_1$ , in dem die Funktion verschwindet. Zu jedem  $\phi$  gibt es nach Hilfssatz 1 ein irreduzibles Polynom  $P$  über  $A_1$ , so daß  $P(\phi; \check{F})|_{G_F} = 0$ .

Sei etwa  $P(\zeta; z^1) = \zeta^v + \zeta^{v-1} \alpha_{v-1}(z^1) + \dots + \zeta \alpha_1(z^1) + \alpha_0(z^1)$

so verschwindet bei jeder Annäherung an  $R$  - nach obigem Ergebnis - die Koeffizientenfunktion  $\alpha_0$ . Da  $R$  Radó'sches Randstück ist, ist also  $\alpha_0$  identisch 0 in  $A_1$ . Wegen der Irreduzibilität von  $P$  ist dann  $P(\zeta; z^1) = \zeta$ , und deshalb muß  $\phi$  in  $G_F$  konstant sein.

Alle  $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  verschwinden also in  $G_F$ .  
 $(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_m})$

Dann muß aber jeweils mindestens ein Faktor identisch verschwinden.  $l_{\sigma} \circ \hat{F} |_{G_F} = 0$  wäre ein Widerspruch dazu, daß  $F$  surjektiv und  $l_{\sigma}$  nicht konstant vorausgesetzt wurden.

e') Es gibt also mindestens eine Indexmenge  $\Lambda_{j_0}$ , so daß alle Resultanten  $\mathcal{R}(Q_{\lambda}; \frac{\partial}{\partial z_v} Q_{\lambda})$  für  $\lambda \in \Lambda_{j_0}$  und für alle Koordinanten  $z_v$  von  $B'$  in  $A_1$  verschwinden.

$\Lambda_{j_0} = \{1, \dots, n_2\}$  scheidet aus.

Für den Beweis zu Satz 3 wird Hilfssatz 4 genauso verwendet wie für den Beweis zu Satz 2. Die Voraussetzungen zu Hilfssatz 3 in der obigen erweiterten Fassung sind dann erfüllt, wenn man in "1)" noch die Koordinatenfunktionen von  $A_2$  als  $g_1, \dots, g_{n_2}$  hinzunimmt, in "2)" sinngemäß dann  $\Lambda_1 = \{1, \dots, n_2\}$  und

$\Lambda_{\kappa+n_2} = \{\kappa+n_2\}$  setzt, als einfache Randstücke  $E_1$ ,

$E_{\kappa+n_2}$  hat man dann  $E^2$  und  $E_{\kappa}^2$ .

Als Radó'sches Randstück in "3)" nehme man das Randstück von  $\partial B$  mit  $z_1 \in E_{\kappa_0}^1$ .

Die Voraussetzung "4a)" ist wegen der Eigentlichkeit von  $\hat{F}$  und der Randbeschaffenheit von  $A_2$  erfüllt.

Satz 4 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  und  $\mathbb{C}^{n_2}$ , wobei  $n_1 \geq n_2$  sei. Sei  $F : A_1 \rightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe, auf einer Kante  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  kanteneigentliche Korrespondenz, dann gibt es eine  $A_2$  definierende Funktion  $f_j^2$ , so daß die in  $G_F$  holomorphe Funktion  $f_j^2 \circ \hat{F}$  strikt abhängt von der Abbildung

$$\phi_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{F} : G_F \rightarrow \mathbb{C}^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}.$$

( $f_j^2$  wird dann als Zielfunktion der Kante  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  unter der Korrespondenz  $F$  bezeichnet.)

Zusatz 1 : Ist  $F$  auf zwei verschiedenen vollen Kanten  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  kanteneigentlich, so haben  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  holomorph unabhängige Zielfunktionen.

Zusatz 2 : Ist  $F$  vollkanteneigentlich und bilden  $K_1, \dots, K_t$  ein bezüglich  $F$  ausgezeichnetes System, dann gibt es zu den Kanten  $K_1, \dots, K_t$  Zielfunktionen  $f_1, \dots, f_t$ , die ein Repräsentantensystem der  $A_2$  definierenden Funktionen darstellen.

Beweis:

Man kann in der Umgebung  $V$  eines Randpunktes  $z_0^1$  von  $A_1$ , in dem die Funktionalmatrix von  $f_{\kappa_1}^1, \dots, f_{\kappa_2}^1$  maximalen Rang hat,  $A_1 \cap V$  auf ein direktes Produkt  $B \times B'$  biholomorph abbilden. Dabei ist  $B$  eine Teilmenge von  $D^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$ , und  $\partial B$  enthält eine Teilmenge von  $T^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$ .

Mit Hilfe von Hilfssatz 4 kann man nun wieder für  $A_1 \cap V$

Hilfssatz 3 anwenden, wenn man setzt:

in "1)" die  $A_2$  definierenden Funktionen  $f_j^2$  als Funktionen  $g_\lambda$ , in "2)"  $\bigwedge_j = \{j\}$ , als einfache Randstück  $E_j$  hat man dann Teile des Randes  $T$  des Einheitskreises.

Als Radó'sches Randstück in "3)" nehme man  $T^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1} \cap \partial B$ .

Die Voraussetzung "4)" ist wegen der Kanteneigentlichkeit von  $F$  erfüllt.

Die Aussage von Hilfssatz 3 ergibt direkt wieder - wie im Beweis zu Satz 2 - die Behauptung von Satz 4.

Beweis von Zusatz 1 :

Seien zu den Kanten  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$   $f_1^2$  und  $f_2^2$  holomorphe abhängige Zielfunktionen.

$$\psi_{\kappa_1, \kappa_2} : A_1 \longrightarrow B_{\kappa_1, \kappa_2} \quad \text{und}$$

$$\psi_{\kappa_1, \kappa_2} : A_1 \longrightarrow B_{\kappa_1, \kappa_2}$$

seien die durch  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $K_{\kappa_1', \kappa_2'}$  gegebenen maximalen Abbildungen in die komplexe Basen  $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $B_{\kappa_1', \kappa_2'}$ , dann gilt:

Die Abbildung  $f_1^2 \circ \hat{F} : G_F \longrightarrow B_1^2$  hängt strikt ab von den

Abbildungen  $\psi_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{F} : G_F \longrightarrow B_{\kappa_1, \kappa_2}$  und

$$\psi_{\kappa_1', \kappa_2'} \circ \check{F} : G_F \longrightarrow B_{\kappa_1', \kappa_2'}.$$

Es sei nun  $\zeta \in G_F$  so gewählt, daß es eine offene Umgebung  $V$  von  $\zeta$  gibt, die biholomorph äquivalent ist zu einer Umgebung  $V_1$  von  $F(\zeta) \in A_1$ , wo  $d(f_1^2 \circ \hat{F})$  von Null verschieden ist. Dann haben die beiden Abbildungen

$$(f_{\kappa_1}^1 \circ \check{F}, \dots, f_{\kappa_2}^1 \circ \check{F}, f_1^2 \circ \hat{F})|V : V \longrightarrow \mathbb{C}^{\kappa_2 - \kappa_1 + 2}$$

und

$$(f_{\kappa_1'}^1 \circ \check{F}, \dots, f_{\kappa_2'}^1 \circ \check{F}, f_1^2 \circ \hat{F})|V : V \longrightarrow \mathbb{C}^{\kappa_1' - \kappa_2' + 2}$$

Funktionalmatrizen mit nirgends maximalem Rang. Folglich hat aber auch die Abbildung

$$(f_{\kappa_1}^1 \circ \check{F}, \dots, f_{\kappa_2}^1 \circ \check{F}, f_{\kappa_1'}^1 \circ \check{F}, \dots, f_{\kappa_2'}^1 \circ \check{F})|V : V \longrightarrow \mathbb{C}^{\kappa_2 + \kappa_2' - \kappa_1 - \kappa_1' + 2}$$

eine Funktionalmatrix mit nirgends maximalem Rang.

Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  und

$K_{\kappa_1, \kappa_2}$  als verschiedene volle Kanten vorausgesetzt sind.

Beweis von Zusatz 2 :

Sei  $K := \bigcup_{\tau=1}^t K_\tau$  und  $\phi_\tau$  eine  $K_\tau$  beschreibende Abbil-

dung  $f_1^2, \dots, f_{k_2}^2$  ein vollständiges Repräsentantensystem der

$A_2$  definierenden Funktionen.

Nimmt man an, daß  $f_1^2, \dots, f_s^2$  für  $s < k_2$  strikt abhängen von jeweils einer der Abbildungen  $\phi_\tau$  und  $f_{s+1}^2$  von keiner eine Kante  $K_\tau$  beschreibenden Abbildung strikt abhängt, so kann man einen Widerspruch herleiten. Es gibt dann nämlich einen Randpunkt von  $A_2$  auf  $H_{s+1}$ , so daß jede Punktfolge, die gegen ihn konvergiert, eine Urbildmenge in  $A_1$  ohne Häufungspunkt auf  $K$  hat.

Auf  $\partial A_2$  sei ein Punkt  $w^0$  gewählt mit folgenden Eigenschaften:

$$|f_\sigma^2(w^0)| < 1 \quad \text{für } \sigma \neq s+1, \quad |f_{s+1}^2(w^0)| = 1$$

$$\frac{\partial f_{s+1}^2}{\partial z_1^2}(w^0) \neq 0, \quad \text{und ohne Einschränkung der Allgemeinheit}$$

$$\left( \frac{\partial f_{s+1}^2}{\partial z_2^2}, \dots, \frac{\partial f_{s+1}^2}{\partial z_{n_2}^2} \right) (w^0) = (0, \dots, 0).$$

Ohne Einschränkung sei  $w^0 = 0$ . In einer Umgebung  $V$  von  $0$  kann man sich deshalb  $A_2 \cap V$  als das direkte Produkt aus  $\{z_1^2 : \operatorname{Re}(z_1^2) < 0\}$  und  $D^{n_2-1}$  vorstellen.

Sei nun  $w^v$  irgendeine gegen  $0$  konvergierende Folge von Punkten aus  $A_2$ .

Zu  $\sigma \in \{1, \dots, s\}$  wählt man  $V_\sigma$  genügend klein und  $\mu$  mit

$$\frac{\partial f_\sigma^2}{\partial z_\mu^2}(0) \neq 0. \text{ Dann ist die Abbildung } \varphi_\sigma : V_\sigma \rightarrow \varphi_\sigma(V) \subset \mathbb{C}^{n_2},$$

gegeben durch  $z^2 \mapsto (z_1^2, \dots, z_{\mu-1}^2, f_\sigma^2(z^2), z_{\mu+1}^2, \dots, z_{n_2}^2)$  bijektiv.

$$\text{Sei } V := \bigcap_{\sigma=1}^s V_\sigma.$$

Für festes  $\sigma$  sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\varphi_\sigma(0) = 0$  und  $\mu = 2$  gesetzt. Dann sei mit

' $z$ ' das  $n_2-2$  Tupel  $(z_3^2, \dots, z_{n_2}^2)$  bezeichnet.

Wegen der Existenz der holomorphen Umkehrabbildung  $\varphi_\sigma^{-1}$  erhält man nun eine in  $\varphi_\sigma(V)$  holomorphe Funktion  $g_\sigma$ , die die Gleichung

$$(i) \quad f^2(z_1^2, g_\sigma(z_1^2, \zeta, 'z), 'z) = \zeta \text{ für } \zeta \text{ mit}$$

$$(z_1^2, \zeta, 'z) \in \varphi_\sigma(V) \text{ erfüllt.}$$

Da  $\varphi_\sigma(V)$  eine Umgebung der Null ist, können wir ein  $\eta > 0$  finden, eine Umgebung  $V$  der Null im  $\mathbb{C}^{n_2-2}$  und eine Umgebung  ${}^2V$  der Null im  $\mathbb{C}^1$ , so daß  $D \times {}^2V \times V \subset \varphi_\sigma(V)$  gilt.

Sicher gibt es nun ein  $v_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so daß die Mengen

$$N := \{ w^v, v > v_0 \}$$

$$N_0 := \{ w^v + (-\varepsilon + i\varepsilon, 0, \dots, 0), v = 0, v > v_0 \}$$

in  $\varphi_\sigma^{-1}(D \times {}^2V \times V)$  enthalten sind und deshalb  $f_\sigma^2(N \cup N_0)$  relativ kompakt in  ${}^2V$  liegt.

Es gelten nun:

(ii)  $N_0$  ist kompakt in  $A_2$ .

(iii) Je zwei Punkte  $w^v$  und  $w^v := w^v + (-\varepsilon + i\varepsilon, 0, \dots, 0)$  liegen in ein und derselben Zusammenhangskomponente einer  $f_\sigma^2$ -Faser in  $A_2$ .

"(ii)" ist trivial.

"(iii)":

Durch  $w^v(t) := (w_1^v + t(-\varepsilon + i\varepsilon), w_2^v, w^v)$  wird für  $t \in [0, 1]$  ein zusammenhängender Weg, der  $w^v$  und  $w^v$  in  $V \cap A_2$  verbindet, definiert. Nach "(i)" gilt nämlich

$f_{\sigma}^2(w^v(t)), g_{\sigma}(w_1^v(t)), f_{\sigma}^2(w^v), 'w^v) = f_{\sigma}^2(w^v)$  für alle  $t \in [0, 1]$ ,

da ja  $(w_1^v(t), f_{\sigma}^2(w^v), 'w^v) \in \varphi_{\sigma}(V)$  ist.

$f_{\sigma}^2$  hänge von  $\Psi_{\tau(\sigma)}$  strikt ab. Für  $w^0 = 0$  oder  $w^v$  mit  $v \geq v_0$  sei  $M_{\sigma}(w^v)$  die Zusammenhangskomponente von  $f_{\sigma}^{-1}(f_{\sigma}^2(w^v))$  in  $A_2$ , die für  $v \geq v_0$   $w^v$  enthält oder jede Umgebung der Null trifft.

$$M_{\sigma} := \bigcup_{v \geq v_0, v=0} M_{\sigma}(w^v),$$

$$\hat{M}_{\sigma}(w^v) := \hat{F}^{-1}(M_{\sigma}(w^v)) \quad \text{und}$$

$$L_{\tau(\sigma)}(w^v) := \{z^1 \in A_1 : \Psi_{\tau(\sigma)}(z^1) \in \Psi_{\tau(\sigma)} \circ \check{F}(\hat{M}(w^v))\},$$

$$L_{\tau(\sigma)} := \bigcup_{v \geq v_0, v=0} L_{\tau(\sigma)}(w^v).$$

Man kann nun zeigen, daß  $L := \bigcup_{\sigma=1}^S L_{\tau(\sigma)}$  keinen Häufungspunkt auf  $K$  hat:

$\Psi_{\tau} \circ \check{F}$  bildet Fasern von  $f_{\sigma}^2 \circ \hat{F}$  mit inneren Punkten in  $G_F$  in analytische Mengen in der durch  $K_{\tau(\sigma)}$  gegebenen komplexen Basis  $B$  ab. Deshalb liegt jede in  $A_1$  zusammenhängende (analytische) Bildmenge von  $\hat{M}_{\sigma}(w^v)$  über mindestens einem inneren Punkt von  $B$ . Da  $f_{\sigma}^2$  über  $K_{\tau(\sigma)}$  lokale Extremalwerte annimmt, trifft jede solche Bildmenge eine ganze Halbumgebung von  $K_{\tau(\sigma)}$  nicht.

Man kann sogar schließen, daß  $L_{\tau(\sigma)}$  eine Umgebung von  $K_{\tau(\sigma)}$  nicht trifft. Weil  $L_{\tau(\sigma)}$  bezüglich der Werte, die  $f_{\sigma}^2$  darüber annimmt, abgeschlossen ist, läge nämlich sonst jeder Häufungspunkt von  $L_{\tau(\sigma)}$  auf  $K_{\tau(\sigma)}$  schon in einem  $L_{\tau(\sigma)}(w^v)$ .

$L_{\tau(\sigma)}$  trifft jeweils eine ganze Umgebung von  $K_{\tau(\sigma)}$  nicht, also trifft  $L$  eine Umgebung von  $K$  nicht.

Wegen  $F(N) \subset L_{\tau(\sigma)}^{-1}$  gilt andererseits  $F(N) \subset L^{-1}$ .

Die Punktmenge  $F(N)^{-1}$  hat also keinen Häufungspunkt auf  $K$ ,  $N$  war aber eine beliebige gegen  $w^0 \in \partial A_2$  konvergierende Folge. Das ist ein Widerspruch dazu, daß  $F$  vollkanteneigentlich vorausgesetzt ist.

§ 2 Fortsetzungen holomorpher Überlagerungskorrespondenzen  
zwischen analytischen Polyedergebieten im  $\mathbb{C}^n$ .

Hilfssatz 5 : Sei  $A$  ein analytisches Polyedergebiet im  $\mathbb{C}^n$ ,

$$P := \{z \in U : |f_{\kappa}(z)| \leq 1, \kappa = 1, \dots, k\}$$

das dazugehörige Polyeder, dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß alle Gebiete  $A^{\eta}$ , definiert als Zusammenhangskomponenten der Mengen

$$P^{\eta} := \{z \in U : |f_{\kappa}(z)| \leq \eta + 1, \kappa = 1, \dots, k\},$$

die  $A$  enthalten, für alle  $\eta < \varepsilon$  analytische Polyedergebiete in  $U$  sind, die die abgeschlossene Hülle  $\bar{A}$  von  $A$  enthalten.

**Beweis:**

Nach Definition von  $A$  ist das zugehörige Polyeder  $P$  in  $U$  kompakt, folglich gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß alle  $P^{\eta}$  mit  $\eta < \varepsilon$  in  $U$  kompakt sind.

Hilfssatz 6 : Sei  $A$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{C}^n$ ,  
der Rand  $\partial A$  von  $A$  habe überall die  
topologische Dimension  $2n-1$  und bestehe  
aus stetigen Hyperflächen. Sei  $f$  eine  
in einer Umgebung  $U$  von  $A$  holomorphe, nicht  
konstante Funktion, dann ist die komplexe Basis  
zur Abbildung  $f|_A : A \longrightarrow \mathbb{C}$  eine von endlich  
vielen geschlossenen Kurven berandete Riemann-  
sche Fläche  $B$ .

Beweis:

$B$  ist über  $f(A)$  eine konkrete Riemannsche Fläche mit Rand  
 $\partial B$  über der abgeschlossenen Hülle  $\overline{f(A)}$  von  $f(A)$  in  $\mathbb{C}$ .  
Man muß nur noch zeigen, daß die berandenden Kurven keine Ver-  
zweigungs- oder Endpunkte haben, und daß höchstens endlich viele  
Randkurven schon den gesamten Rand  $\partial B$  ergeben.

Sei  $\tilde{f}$  die zu  $f|_A$  maximale Abbildung. Sei  $z_0$  ein Rand-  
punkt von  $A$ , und  $f(z_0)$  sei Grundpunkt eines Randpunktes  
von  $B$ . Wegen der Offenheit von  $f$  haben alle Randpunkte von  
 $B$  nur auf  $\partial A$  Urbilder.  $V$  sei eine offene Umgebung von  $z_0$ ,  
die einfach zusammenhängend ist.

$g$  sei nun eine holomorphe Funktion in  $A$ , die in  $A \cap V$  holo-  
morph abhängig von  $f$  ist.

Ist  $df(z_0) = 0$ , so wechselt man die lokalen Koordinaten von  $B$  über  $f(z_0)$  (und die lokale Einbettung des Randes  $\partial B$ ), indem man in  $A \cap V$  eine von  $f$  abhängige und in ganz  $V$  holomorphe Funktion  $f'$  mit  $df'(z_0) \neq 0$  nimmt. Man betrachtet nun  $\partial B$  über  $f'(V)$  in  $f'(z_0)$ .

Ohne Einschränkung sei also  $df(z_0) \neq 0$ , etwa  $\frac{\partial}{\partial z_1} f(z_0) \neq 0$ .

Dann gibt es eine offene Umgebung  $V' \subset V$  von  $z_0$ , so daß die Abbildung  $\phi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (f(z), z_2, \dots, z_n)$

$V'$  biholomorph auf das Bild  $\phi(V')$  abbildet.

$\phi^{-1}$  hat die Funktionalmatrix:

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} & 1 & \frac{1}{f} & (-\frac{\partial f}{\partial z_2}) & \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} & (-\frac{\partial f}{\partial z_n}) \\ & 0 & & & & \\ & \cdot & & E & & \\ & \cdot & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Für die in  $\phi(A \cap V)$  holomorphe Funktion  $g' := g \circ \phi^{-1}$  gilt  $\nabla g' = \nabla g \cdot (\phi^{-1})$ . Das bedeutet aber wegen der holomorphen Abhängigkeit von  $g$  und  $f$  in  $A \cap V$ , daß alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial z_j} g'$  für  $j > 1$  in  $\phi(V')$  verschwinden.  $g'$  ist Funktion der ersten Koordinate.

Die Funktionswerte einer von  $f$  holomorph abhängigen Funktion  $g$  sind in  $A \cap V'$  also eindeutig durch die Funktionswerte von  $f$  gegeben. Jede von  $f$  in  $A$  abhängige Funktion ist in  $A \cap V'$  also über die in  $f(V')$  einfach zusammenhängende Bildmenge  $f(A \cap V')$  faktorisierbar. Die Menge  $\partial(f(A \cap V') \cap f(V'))$  entspricht also einem Kurvenstück von  $\partial B$ . Das zeigt aber, daß  $\partial B$  über  $f(V')$  keine Verzweigungspunkte oder Endpunkte haben kann.

Wegen der Kompaktheit von  $\partial A$  und der Teilmenge  $\tilde{f}^{-1}(\partial B)$ , gibt es endlich viele Umgebungen  $V_i^1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , obiger Gestalt, die  $\tilde{f}^{-1}(\partial B)$  überdecken. Die Anzahl der Randkurven, die  $\partial B$  bilden, ist also endlich.

Hilfssatz 7 : Sei  $A$  ein analytisches Polyedergebiet im  $\mathbb{C}^n$ ,  
 $U$  wie in Definition 4 gegeben,  
 $f$  eine  $A$  definierende Funktion, dann ist die  
komplexe Basis  $B$  zur Abbildung  $f|A : A \longrightarrow \mathbb{C}$   
stückweise reellanalytisch über  $f(U)$  berandet.

Beweis:

Sei  $\tilde{f}$  die zu  $f|A$  maximale Abbildung mit  $\tilde{f}(A) = B$ .

Wegen der Offenheit von  $f$  weiß man, daß die Urbilder aller Randpunkte von  $B$  Randpunkte von  $A$  sind, so daß man auf Grund des Maximumprinzips schließen kann, - nur solche Punkte kommen in Betracht, wo  $f$  lokal Extremalwerte annimmt - daß

nur solche Kantenpunkte

$$K_{\kappa_1, \kappa_\ell} := \{z \in \bar{A} : |f_{\kappa_1}(z)| = \dots = |f_{\kappa_\ell}(z)| = 1\}$$

vorkommen können, auf denen  $f$  von  $f_{\kappa_1}, \dots, f_{\kappa_\ell}$

holomorph abhängt. ( $f$  ist dann auf allen in  $K_{\kappa, \kappa_2}$

enthaltenen analytischen Mengen konstant - das sind genau

die, die durch eine Gleichung  $(f_{\kappa_1}, \dots, f_{\kappa_\ell}) = \text{const.}$

beschrieben werden können.)

Da das Bild der Menge  $\{df = 0\}$  nur aus isolierten Punkten besteht, und das zu behandelnde Problem lokal ist, genügt es im Folgenden die Behauptung für  $f$  als der ersten Koordinatenfunktion  $z_1$  zu zeigen.

Sei nun  $f_1, \dots, f_L$  ein Funktionensystem minimaler Länge, so daß  $z_1$  von  $f_1, \dots, f_L$  holomorph abhängt. Außerdem gebe es eine Umgebung  $V$  von  $z_0 \in K_{1,L}$  derart, daß  $z_1$  in  $A \cap V$  nur auf  $K_{1,L}$  Extremalwerte annimmt.

Zwischenbehauptung 1 : Die Funktionalmatrix von  $f_1, \dots, f_L$  verschwindet in  $V$  nur in solchen Punkten - die eine analytische Menge  $M$  ausmachen - deren Bild  $z_1(M \cap V \cap \bar{A})$  aus isolierten Punkten in  $z_1(V)$  besteht.

$z_1$  ist auf  $M$  entweder konstant, - dann ist nichts mehr zu zeigen -, oder es bildet volldimensional in  $\mathbb{C}$  ab. In diesem Fall betrachten wir  $z_1$  auf  $N := M \cap K_{1,L}$  und sehen, daß  $z_1(N) = z_1(M \cap K_{1,L-1})$  - nach geeigneter Umnummerierung der  $A$  definierenden Funktionen  $f_\lambda$  - ist.  $z_1(N)$  kann nun aber von  $\partial B$  kein ganzes Kurvenstück enthalten, man hätte sonst einen Widerspruch zur Minimalitätsannahme. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Ohne Einschränkung sei im Folgenden  $M \cap V = \emptyset$ .

Ist  $V$  genügend klein, so wird durch

$$\phi : z \longmapsto (f_1(z), \dots, f_L(z), z_{L+1}, \dots, z_n)$$

eine biholomorphe Abbildung gegeben. Sei  $F_1 := z_1 \circ \phi^{-1}$ .

Es gilt:

$$z_1(A \cap V) = F_1(\phi(A) \cap \{z : (z_{L+1}, \dots, z_n) = \text{const.}\})$$

für einen geeigneten Vektor const.. Deshalb bedeutet es keine weitere Einschränkung, wenn wir  $L = n$  voraussetzen.

Die Behauptung des Hilfssatzes wird nun dadurch bewiesen, daß gezeigt wird, daß die Punktmenge  $F_1(w \in \mathbb{C}^n : |w_1| = \dots = |w_n| < 1)$  stückweise reellanalytisch berandet ist. Für den Fall, daß  $\frac{\partial}{\partial w_v} F_1, v = 1, \dots, n$ , nirgends verschwinden, kann man den klassischen Satz über die Einhüllende einer analytischen Kurvenschar mit analytischem Parameter  $n$ -mal anwenden und erhält die Behauptung des Hilfssatzes.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß  $\frac{\partial}{\partial w_v} F_1$  nur in Punktmengen verschwindet, deren Bilder auf  $\partial B$  isoliert sind.

$\frac{\partial}{\partial w_v} F_1(w_0) = 0$  ist äquivalent damit, daß das algebraische Komplement  $A_{v,1}$  zu  $\frac{\partial}{\partial z_1} f_v$  in der Funktionaldeterminante von 0 in  $w_0$  maximalen Rang hat.

Zwischenbehauptung 2 : Die Bildmenge  $z_1(\{z \in \bar{A} \cap V : \det(A_{v_1}) = 0\})$  besteht höchstens aus isolierten Punkten.

Zwischenbehauptung 2 wird völlig analog 1 gezeigt. Wenn  $z_1$  von  $f_1, \dots, f_n$  abhängig ist auf der Menge  $\{z : \det(A_{v_1}) = 0\}$ , so ist  $z_1$  dort schon - nötigenfalls nach Umnummerierung - von  $f_1, \dots, f_{n-1}$  abhängig.

Auf  $\{z : \det(A_{11}) = 0\}$  gelte etwa, daß  $f_n$  bei konstanter erster Koordinate  $z_1$  von  $f_2, \dots, f_{n-1}$  abhängt. Da nach Voraussetzung  $z_1$  von  $f_1, \dots, f_n$  abhängig ist, haben wir die Vektorgleichung:

$$\ell_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 = C_1(\nabla f_1)^T + C_2(\nabla f_2)^T + \dots + C_{n-1}(\nabla f_{n-1})^T + C_n(\nabla f_n)^T$$

so daß man wegen der Abhängigkeit der Funktion  $f_n$  bei konstantem  $z_1$  von  $f_2, \dots, f_{n-1}$  erhält:

$$\ell_1 = C_1(\nabla f_1)^T + C_2(\nabla f_2)^T + \dots + C_{n-1}(\nabla f_{n-1})^T + C_n \cdot 1$$

Wegen Zwischenbehauptung 1 hat  $((\nabla f_1)^T, \dots, (\nabla f_n)^T)$  maximalen Rang. Deshalb kann  $C_n$  nicht 1 sein. Deshalb ist

$$\ell_1 = \frac{C_1}{1-C_n} (\nabla f_1)^T + \frac{C_2}{1-C_n} (\nabla f_2)^T + \dots + \frac{C_{n-1}}{1-C_n} (\nabla f_{n-1})^T$$

eine Linearkombination, die zeigt, daß  $z_1$  auf

$\{z : \det(A_{11}) = 0\}$  schon von  $f_1, \dots, f_{n-1}$  abhängt.

im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von  $n$ .

Damit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 8 : Seien  $A_1, A_2$  Gebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  und  $\mathbb{C}^{n_2}$  mit  $n_1 \geq n_2$ . Sei  $F : A_1 \rightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe Korrespondenz,  $X$  ein reduzierter komplexer Raum,  $\phi : A_1 \rightarrow X$  eine holomorphe und surjektive Abbildung,  $g$  eine in  $A_2$  holomorphe Funktion,  $g : A_2 \rightarrow B$  die zu  $g$  gehörige maximale Abbildung in die komplexe Basis  $B$ , die eine zusammenhängende,

von endlich vielen geschlossenen Kurven  
berandete Riemannsche Fläche sei.

Gibt es dann zu jeder von  $g$  holomorph  
abhängigen Funktion  $f \in \mathcal{O}(A_2)$  irreduzible  
Polynome  $Q_f =$

$\zeta^n + \zeta^{n-1} \alpha(x) + \dots + \alpha_0(x) \in \mathcal{O}(X)[\zeta]$ , so daß

$Q_f(f \circ \hat{F} ; \phi \circ \check{F})|_{G_F} = 0$ , so induziert  $F$

eine irreduzible, schwach holomorphe Korrespon-  
denz  $\check{F} : X \longrightarrow B$ , deren Graph  $G_{\check{F}}$  das Bild  
des Graphen  $G_F$  vermöge der Abbildung

$(\phi \circ \check{F}, \tilde{g} \circ \hat{F}) : G_F \longrightarrow X \times B$  ist.

**Beweis:**

Man muß zeigen, daß  $(\phi \circ \check{F}, \tilde{g} \circ \hat{F}) (G_F)$  analytisch in  $X \times B$   
ist. Man sieht, daß  $G_{\check{F}}$  als gemeinsames Nullstellengebilde von  
in  $X \times B$  holomorphen Funktionen beschrieben werden kann:

$$G_{\check{F}} := \bigcup_{f \in \mathcal{O}(A_2)} \{(x, b) \in X \times B : Q_f(\varphi_f(b) ; x) = 0\}$$

$$f = \varphi_f \circ \tilde{g}$$

Die Inklusion  $(\phi \circ \check{F}, \tilde{g} \circ \hat{F}) (G_F) \subset G_{\check{F}}$  ist trivial.

Andererseits gibt es nach Ahlfors eine holomorphe Überlagerungsabbildung  $h : B \longrightarrow D$ , so daß das Bild von  $G_{\tilde{F}}$  vermöge  $(f, \text{id}_X)$  in  $D \times X$  irreduzibel ist. Da  $B$  zusammenhängend ist, ist auch  $G_{\tilde{F}}$  irreduzibel.

Aus Dimensionsgründen folgt nun aber  $G_{\tilde{F}} = (\phi \circ \tilde{F}, \tilde{g} \circ \hat{F}) (G_F)$ .

Hilfssatz 9 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  und  $\mathbb{C}^{n_2}$  mit  $n_1 \geq n_2$ . Sei  $F: A_1 \longrightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe Korrespondenz,  $\phi$  eine maximale, holomorphe Abbildung von  $A_1$  auf ein Gebiet  $B$  über dem  $\mathbb{C}^m$  zur Abbildung  $(f_1^1, \dots, f_m^1)|_{A_1} \longrightarrow \mathbb{C}^m$  - die überall Rang  $m$  habe - von  $m$   $A_1$  definierenden Funktionen. Sei  $f^2$  eine  $A_2$  definierende Funktion.  $g : A_2 \longrightarrow B_g$  die maximale Abbildung auf die komplexe Basis  $B_g$  zu  $f^2|_{A_2}$ . Dann ist die nach Satz 4 und Hilfssatz 8 durch  $F$  induzierte, schwach holomorphe Korrespondenz  $\tilde{F} : B \longrightarrow B_g$  holomorph.

Beweis:

Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & \xleftarrow{\tilde{F}} & G_F \\
 \phi \downarrow & P_1 & \downarrow \psi := (\phi \circ \tilde{F}, g \circ \hat{F}) \\
 B & \xleftarrow{\tilde{F}} & G_{\tilde{F}} \subset B \times B_g
 \end{array}$$

ist die Eigentlichkeit von  $p_1$  auf Grund der Eigentlichkeit von  $F$  nachzuweisen.

Wir führen den Beweis durch Widerspruch.

Ist  $p_1$  nicht eigentlich, dann gibt es eine Punktfolge  $((b_g^i))$  mit  $b_g^i \in B_g$ , die gegen  $b_g^0 \in \partial B_g$  konvergiert, deren Urbilder bzgl.  $\tilde{F}$  eine Punktfolge  $((b^i))$  mit  $b^i \in F(b_g^i)$  enthalten, die gegen einen inneren Punkt  $b \in B$  konvergiert.

$b$  entspricht in  $A_1$  eine Faser  $\phi^{-1}(b)$ , die das Innere von  $A_1$  trifft. Sei also  $a^0 \in \phi^{-1}(b)$ . Sicher gibt es eine Punktfolge  $((a^i_j))$  mit  $a^i_j \in \tilde{F}(\tilde{F}^{-1}(g(b^i_j))) \cap \phi^{-1}(b^i_j)$ , die gegen  $a^0$  konvergiert.  $\phi$  ist ja nirgends entartet und bildet deshalb offen ab. Das Bild einer Kugel um  $a^0$  trifft fast alle  $b^i$ , also haben fast alle  $b^i$  Urbilder in der um  $a^0$  gewählten Kugel.

$\{a^0\} \cup \{a^i_j : j = 1, \dots\}$  ist eine kompakte Menge in  $A_1$ . Ihre Urbilder in  $G_F$  haben aber einen Häufungspunkt auf dem Rand von  $G_F$ . Die Bilder der  $\phi$ -Fasern sind ja ganz in den  $g$ -Fasern enthalten, die aber gegen  $\partial A_2$  konvergieren. Wegen der Offenheit von  $g$  kann über  $b_g^0$  kein innerer Punkt von  $A_2$  liegen. Über einem Randpunkt von  $A_2$  liegen aber wieder nur Randpunkte von  $G_F$ .

Damit haben wir einen Widerspruch zur Eigentlichkeit von  $\check{F}$ .

Bemerkung : Im Falle einer holomorphen Überlagerungskorrespondenz zwischen zwei Polyedergebieten ist damit bewiesen, daß die nach Satz 4 und Hilfssatz 8 durch  $F$  induzierte Korrespondenz  $\tilde{F}$  sowohl holomorph als auch eigentlich ist.

Satz 5 : Seien  $A_1, A_2$  Bishopsche Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^n$  und  $U_i$  zu  $A_i$  wie in Definition 4 gegeben. Sei  $F : A_1 \dashrightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenz, dann ist  $F$  zu einer irreduziblen, schwach holomorphen Korrespondenz  $F' : U_1 \dashrightarrow U_2$  fortsetzbar.

Zusatz: Zu jedem Polyedergebiet  $A_2^{\ell_2}$  - gemäß Hilfssatz 5 - gibt es ein Polyedergebiet  $A_1^{\ell_1}$ , so daß  $F'|_{A_1^{\ell_1} \times A_2^{\ell_2}} : A_1^{\ell_1} \dashrightarrow A_2^{\ell_2}$  holomorph ist.

Beweis:

a) Sei  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  die durch  $z^i \mapsto (f_1^i(z^i), \dots, f_n^i(z^i))$  gegebene Abbildung, dann sind

$$\phi_1|_{A_1} : A_1 \longrightarrow D_{\mathcal{E}}^n \quad \text{und} \quad \phi_1|_{A_1} \longrightarrow D^n$$

holomorphe Überlagerungsabbildungen.

$$H := (\phi_2|_{A_2}) \circ F \circ (\phi_1|_{A_1})^{-1} : D^n \longrightarrow D^n \quad \text{ist folglich}$$

eine irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenz.

b) Nach Satz 1 zerfällt  $H$  in irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenzen  $H_i : D \longrightarrow D$  des Einheitskreises in sich, so daß  $G_H = G_{H_1} \times \dots \times G_{H_n}$  gilt,

wird nämlich die Projektion von  $D^n$  auf die  $i$ -te Komponente mit  $p_i$  bezeichnet, so gilt für beliebige Punkte  $d^1 \in D$  mit  $(d^1, d^2) \in G_H$

$$(p_i, p_i)(G_H) = G_{H_i} := G_H \cap \{(w^1, w^2) \in D^n \times D^n : w_j^k = d_j^k \text{ für}$$

$$j \neq i, k = 1, 2\}$$

c) Die Korrespondenzen  $H_i : D \longrightarrow D$  sind fortsetzbar zu holomorphen Korrespondenzen  $H'_i : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$  nach einem Satz von Tornehave (siehe Lit.: 16, Lit.: 17)

d)  $(\phi_1^{-1}, \phi_2)(G_{H'_1} \times \dots \times G_{H'_n})$  ist eine analytische Menge

in  $U_1 \times U_2$ . Nimmt man die irreduzible Komponente  $G_P$ , von

ihr, die  $G_F$  enthält, so ist  $G_F$ , der Graph der gesuchten Korrespondenz  $F' : U_1 \longrightarrow U_2$ .

e) Zum Beweis des Zusatzes muß man nur zeigen, daß es zu  $\kappa_2 > 0$  ein  $\kappa_1 > 0$  gibt, so daß für

$$w_i^2 \in H_i (\{w_i^1 : |w_i^1| < 1 + \kappa_1\}) \text{ gilt } |w_i^2| < 1 + \kappa_2,$$

was trivial ist.

Also haben alle Punkte von  $A_1^{\kappa_1}$  nur Bildpunkte im Innern von  $A_2^{\kappa_2}$ . Das beweist die Eigentlichkeit der Projektion von

$$G_F \cap (A_1^{\kappa_1} \times A_2^{\kappa_2}) \text{ auf } A_1^{\kappa_1}.$$

Satz 6 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^n$ .

Dann gibt es topologisch höchstens  $2n-2$  dimensionale Mengen  $S^1, S^2$  und Gebiete  $A_1', A_2'$  im  $\mathbb{C}^n$ , für die gilt:  $A_1' \supset \bar{A}_1 \setminus S^1$  und  $A_2' \supset \bar{A}_2 \setminus S^2$ , so daß jede irreduzible, holomorphe Überlagerungskorrespondenz  $F : A_1 \longrightarrow A_2$  fortsetzbar ist zu einer irreduziblen, schwach holomorphen Korrespondenz  $F' : A_1' \longrightarrow A_2'$ .

Zusatz :  $S^1$  und  $S^2$  sind im Innern von  $A_1$  bzw.  $A_2$  berandenden Hyperflächen oder den Schnittmengen zweier durch äquivalente Funktionen definierten Hyperflächen 1 codimensionale analytische Mengen. Überall sonst haben sie höchstens die topologische Dimension  $2n-3$ .

**Beweis:**

a) Nach Satz 2 ist die maximale Anzahl der paarweise holomorph unabhängigen  $A_1$  definierenden Funktionen gleich der Anzahl, der paarweise holomorph unabhängigen  $A_2$  definierenden Funktionen.

Seien  $f_1^1, \dots, f_k^1$  und  $f_1^2, \dots, f_k^2$  jeweils Systeme maximaler Länge solcher paarweise holomorph unabhängiger Funktionen.

b) Seien  $A_1^{\mathcal{K}_1}$  und  $A_2^{\mathcal{K}_2}$  analytische Polyedergebiete, wie sie nach Hilfssatz 5 existieren, die  $A_1$  bzw.  $A_2$  enthalten. Dann sei für  $i = 1, 2$  und  $\kappa = 1, \dots, k$

$\tilde{f}_\kappa^i : A_1^{\mathcal{K}_i} \longrightarrow B_\kappa^i$  die maximale Abbildung zu  $f^i|_{A_1^{\mathcal{K}_i}}$

$\tilde{f}_\kappa^i : A_i \longrightarrow B_\kappa^i$  die maximale Abbildung zu  $f^i|_{A_i}$ , wobei

$B_\kappa^i$  und  $B_\kappa^i$  jeweils die komplexen Basen bezeichnen sollen.

Dann definiert man die eigentlichen Abbildungen:

$\phi_1^i : A_i \longrightarrow B^i$  durch  $z^i \longmapsto (f_1^i(z^i), \dots, f_k^i(z^i))$

$\phi_i : A_i \longrightarrow B^i$  durch  $z^i \longmapsto f_1^i(z^i), \dots, f_k^i(z^i)$

c) Jedes  $B_\kappa^i, B_\kappa^i$  ist eine von endlich vielen geschlossener Kurven berandete Riemannsche Fläche nach Hilfssatz 6.

d)  $B_\kappa^i$  ist stückweise reellanalytisch über  $B_\kappa^i$  nach Hilfssatz 7.

e) Die Punktmenge  $G_{F_{\kappa}} := (\tilde{f}_{\kappa}^1 \circ \tilde{F}, \tilde{f}_{\kappa}^2 \circ \hat{F}) (G_F)$  ist eine in  $B_{\kappa}^1 \times B_{\kappa}^2$  analytische Menge nach Hilfssatz 8.  $G_{F_{\kappa}}$  definiert eine holomorphe Überlagerungskorrespondenz  $F_{\kappa} : B_{\kappa}^1 \longrightarrow B_{\kappa}^2$  nach Hilfssatz 9.

f) Nach einem Satz von Ahlfors (vgl. Lit. 1) ist jedes  $B_{\kappa}^i$  endlichfach dem Einheitskreis  $D$  überlagerbar durch eine holomorphe Überlagerungsabbildung  $h_{\kappa}^i : B_{\kappa}^i \longrightarrow D$ .

g) Die vermöge  $(h_{\kappa}^1, h_{\kappa}^2)$  induzierte holomorphe Überlagerungskorrespondenz des Einheitskreises in sich ist nach einem Satz von Tornehave (vgl. Lit. 16) zu einer algebraischen Korrespondenz von  $\tilde{F}$  in  $\tilde{F}$  fortsetzbar.

h) Über die reellanalytischen Stücke der Ränder  $\partial B_{\kappa}^i$  ist jeweils die Abbildung  $h_{\kappa}^i$  lokal holomorph fortsetzbar. So erhält man eine holomorphe Abbildung  $h_{\kappa}^i : \tilde{B}_{\kappa}^i \longrightarrow C, \kappa = 1, \dots, K$  einer Riemannschen Fläche  $\tilde{B}_{\kappa}^i$ , die als konkrete Riemannsche Fläche über einer Teilmenge von  $B_{\kappa}^i$  liegt, und die  $B_{\kappa}^i$  und alle reellanalytischen Stücke von  $\partial B_{\kappa}^i$  als innere Punkte enthält.

Vermöge  $(h_{\kappa}^1, h_{\kappa}^2)$  erhalten wir eine schwach holomorphe Korrespondenz  $F'_{\kappa} : \tilde{B}_{\kappa}^1 \longrightarrow \tilde{B}_{\kappa}^2$ .

i) Sei  $z_0^i \in \partial A_i$  und dazu  $V_i \subset A_i^{k_i}$  eine offene Umgebung von  $z_0^i$  für  $i = 1, 2$  so klein gewählt, daß  $\tilde{f}_\kappa^i(A_i \cap V_i)$  einfach über  $\tilde{f}_\kappa^i(A_i \cap V_i)$  liegt und daß - falls  $\tilde{f}_\kappa^i(A_i \cap V_i) \not\subset \tilde{f}_\kappa^i(V_i)$  und deshalb  $\tilde{f}_\kappa^i(V_i) \cap \partial B_\kappa^i \neq \emptyset$  - vermöge der Einbettung von  $\tilde{f}_\kappa^i(A_i \cap V_i)$  in  $\tilde{f}_\kappa^i(V_i)$  nur ein reellanalytisches Stück von  $\partial B_\kappa^i$  in  $\tilde{f}_\kappa^i(V_i)$  enthalten ist.

Vermöge der Abbildung  $(\phi_1', \phi_2')|_{V_1 \times V_2}$  kann man die nach "h)" gegebene analytische Menge  $G_{F_1} \times \dots \times G_{F_k} \cap (\phi_1', \phi_2')(V_1 \times V_2)$  zu einer Fortsetzung von  $G_F \cap ((A_1 \cap V_1) \times (A_2 \cap V_2))$  in  $V_1 \times V_2$  liften.

j) Als Ausnahmemengen  $S^1$  und  $S^2$  kommen also die jeweiligen Gesamtheiten der Punkte von  $\partial A_1$  und  $\partial A_2$  in Betracht, wo nicht wie unter "i)" vorgegangen werden kann. Das sind:

1) Zu zwei in  $U_i$  holomorph abhängigen  $A_i$  definierenden Funktionen  $f_1, f_2$  gibt es zwei Hyperflächenstücke von  $\partial A_i$

$$H_1 := \{z \in U_i \cap \bar{A}_i : |f_1(z)| = 1\} \quad \text{und}$$

$H_2 := \{z \in U_i \cap \bar{A}_i : |f_2(z)| = 1\}$ , die nicht leeren Durchschnitt haben. Die komplexe Basis  $B$  zu  $f_1|_{A_i}$  und  $f_2|_{A_i}$  hat im Allgemeinen in dem dem Punkt  $z_0 \in H_1 \cap H_2$  entsprechenden Randpunkt von  $B$  kein reellanalytisches Kurvenstück als Rand.

$H_1 \cap H_2$  ist lokal analytisch in  $U_i$ , und es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_1 \cap H_2) = n-1.$$

2) Zu einer der analytischen Projektionen  $\tilde{f}'_1$  gibt es ein Schnittgebilde  $H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m}$  ( $m \geq 2$ ) von Hyperflächenstücken  $H_{j_\lambda} \subset \partial A_i$  deren zugehörige Funktionen  $f_{j_\lambda}$  von der zu  $\tilde{f}'_1$  gehörigen Funktion  $f_1$  holomorph unabhängig sind, und deren Bild vermöge  $\tilde{f}'_1$  einem Stück des Randes der komplexen Basis  $B$  zu  $f_1|_{A_i}$  entspricht.

Aus dem Beweis zu Hilfssatz 7 entnimmt man dann ohne Mühe, daß die Ausnahmemengen von Punkten auf dem Schnittgebilde  $H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m}$ , die nicht inneren Punkten reellanalytischer Stücke von  $\partial B$  entsprechen, die die Gestalt  $M \cap H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m}$  haben muß, wobei  $M$  eine in  $U_i$  analytische, höchstens  $(n-1)$ -dimensionalen Menge ist, so daß gilt:  $\dim_{\mathbb{R}}(M \cap H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m}) \leq 2n-3$ .

3) (Ausnahmepunkte, über die  $G_F$  zwar lokal fortsetzbar ist, aber diese Fortsetzung nicht notwendigerweise übereinstimmt mit den Fortsetzungen über Nachbarpunkte).

Sei  $z_0$  ein innerer Hyperflächenpunkt von  $H_{j_1}$ , so daß  $f_1, \dots, f_t$  alle Funktionen sind, die von  $f_{t+1}$  in  $z_0$ , aber in keiner vollen Umgebung, holomorph abhängen und für die gilt, daß  $\tilde{f}'_t(z_0)$  auf  $\partial B_t$  in  $B'_t$  für  $t = 1, \dots, t$  nicht auf einem reellanalytischen Randstück liegt.

Dann ist die Abbildung  $\Psi : z \longmapsto (\tilde{f}'_{t+1}(z), \dots, \tilde{f}'_k(z))$   
 in einer vollen Umgebung  $W$  von  $z_0$  nirgends entartet,  
 und  $G_F$  kann vermöge  $\Psi|W$  über  $W$  fortgesetzt werden wie  
 unter Punkt "i").

Beweis:

Da  $\tilde{f}'_\tau(z_0)$  auf  $\partial B_\tau$  liegt für  $\tau \leq t$ , gibt es eine Umgebung  
 $V$  von  $z_0$ , so daß  $\tilde{f}'_\tau|(\tilde{f}_{t+1}^{-1}(\tilde{f}'_{t+1}(z_0)) \cap V)$  für alle  $\tau \leq t$   
 konstant ist. Folglich gilt:

$$M := \tilde{f}_{t+1}^{-1}(\tilde{f}'_{t+1}(z_0)) \cap V = V \cap \bigcup_{\tau=1}^{t+1} \{z \in V : \tilde{f}'_\tau(z) = \tilde{f}'_\tau(z_0)\}$$

und  $\dim_\phi(M) = n-1$ .

Da  $\phi'|M : z \longmapsto \tilde{f}'_1(z), \dots, \tilde{f}'_k(z)$  Beschränkung einer  
 eigentlichen Abbildung ist, bildet deshalb

$\Psi : z \longmapsto (\tilde{f}'_{t+1}(z), \dots, \tilde{f}'_k(z))$  in  $M$  nirgends

entartet ab. Weil  $\Psi|V(z_0) = \Psi|M(z_0)$  gilt, bildet

$\Psi$  in einer geeigneten Umgebung  $V'$  von  $z_0$  mit  $V' \subset V$   
 nach dem Halbstetigkeitstheorem (siehe Lit. 8 S. 66) ebenfalls  
 nirgends entartet ab.

$\tilde{f}_{t+1}^i(z_0)$  liegt auf dem Kreisbogenstück, das zu  $\partial B_{t+1}$  gehört, und für  $\tau > t+1$  liegt  $\tilde{f}_\tau^i(z_0)$  im Innern von  $B_\tau$ . Gilt dies für  $A_1$  definierende Funktionen - eines festen Repräsentantensystems - so gilt dies aber auch für die nach Satz 2 zugeordneten  $A_2$  definierenden Funktionen (und umgekehrt) in zugeordneten Punkten.

Also gibt es - zu vermöge  $\overline{G_F}$  zugeordneten Punkten  $z_0^1, z_0^2$ , von denen mindestens einer den Voraussetzungen unter "3)" genügt, Umgebungen  $W_i$ , so daß für  $\tau > t+1$   $\tilde{f}_\tau^i(W_i) \subset B_\tau^i$  und  $\tilde{f}_{t+1}^i(W_i)$  nur solche Randpunkte von  $B_{t+1}^i$  trifft, die Kreislinienpunkte sind, so daß also

$$(\phi_1^i, \phi_2^i)(W_1, W_2) \cap (G_{F_{t+1}} \times \dots \times G_{F_k}) \text{ in ganz}$$

$$\phi_1^i(W_1) \times \phi_2^i(W_2) \text{ analytisch ist.}$$

Vermöge  $(\psi_1, \psi_2) \mid (W_1 \times W_2)$  kann man diese analytische Menge liften wie im Beweispunkt "i)".

§ 3 Fortsetzungen holomorpher, kanteneigentlicher  
Korrespondenzen zwischen analytischen Polyedergebieten  
in komplexen Zahlenräumen.

Hilfssatz 10 : (Edge of the wedge theorem)

Sei  $U \subset \mathbb{D}^n$  eine offene Umgebung von

$\{z \in \mathbb{D}^n : 0 < \epsilon \leq |z_1| = \dots = |z_n|\}$ , dann gibt

es eine offene Umgebung  $V$  von  $T^n$ , die  $U$   
 enthält und bezüglich der Spiegelung  $\mathcal{Q}$  :

$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\frac{1}{\bar{z}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_n})$ , invariant

ist (d.h.  $\mathcal{Q}(V) = V$ ), derart, daß jede  
 holomorphe Korrespondenz  $F : U \rightarrow \mathbb{D}$ , die in  
 allen Punkten von  $T^n$  randeigentlich ist, fort-  
 setzbar ist zu einer holomorphen Korrespondenz  
 $F' : V \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $G_{F'} \cap U \times \mathbb{D} = G_F$ .

**Beweis:**

a) Ohne Einschränkung können wir  $F$  als irreduzibel voraus-  
 setzen.

b)  $\hat{F} : G_F \longrightarrow D$  ist eine in  $G_F$  holomorphe Funktion.

Nach Hilfssatz 1 gibt es daher ein irreduzibles Polynom  $P$  über  $\mathcal{O}(D^n \cap U)$ , so daß  $P(\hat{F}; z)|_{G_F} = 0$ . Man setzt nun  $G_F$  fort, indem man die Koeffizientenfunktionen von  $P$  fortsetzt.

c) Zwischenbehauptung: Jede in  $U$  holomorphe Funktion  $f$ , deren Einschränkungen auf alle komplexe Geraden, die durch  $0$  und  $T^n$  gehen, randeigentlich in  $D$  abbilden, ist in eine Umgebung  $V$  von  $T^n$ , mit  $V = \mathcal{Q}(V)$ ,  $U \subset V$ , fortsetzbar.

Ohne Einschränkungen sei  $\{z \in U : z_1 = 0\} = \emptyset$ , dann sei  $U$  zerlegt in eine Schar von komplexen Geraden:

Durch den Punkt  $w = (w_1, \dots, w_n) \in U$  gehe die Gerade

$$L_w := \{z \in D^n : w_1 z_2 - w_2 z_1 = w_1 z_3 - w_3 z_1 = \dots = w_1 z_n - w_n z_1 = 0\}.$$

Sei  $U_1$  die Teilmenge von  $U$ , für die gilt: mit

$(z_1, \dots, z_n) \in U_1$  ist auch für beliebige

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  mit  $|\alpha_v| = 1$

$(\alpha_1 z_1, \dots, \alpha_n z_n) \in U_1$  und  $U_2$  das Bild von  $U_1$ ,  $U'$  das von

$U$  vermöge der Spiegelung  $\mathcal{Q}$  an  $T^n : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\frac{1}{\bar{z}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_n})$

Weiter sei dann  $V' :=$

$\{z \in L_{w_2} \text{ für } w \in U, \text{ zu } z \text{ gibt es } u^1 \in L_w \cap U_1 \text{ und}$   
 $u^2 \in L_w \cap U_2, \text{ so daß } |u^1| < |z| < |u^2|\}$

und  $V := U \cup U' \cup V'$ .

Setzt man für jedes

$z \in (U \cap D^n) \cup (U' \cap (\bar{D})^n) \cap L_w: g_w(z_1) = f(z) \text{ für } z \in D^n$

und  $g_w(z_1) = \frac{1}{f(z)}$  für  $z \in (\bar{D})^n$ , so erhält man eine

holomorphe Funktion.

$$g'_w(z_1) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=R_1} \frac{g_w^{(\alpha)}(\alpha)}{\alpha - w_1} d\alpha - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=R_2} \frac{g_w^{(\alpha)}(\alpha)}{\alpha - w_1} d\alpha$$

ist dann eine unabhängig von der speziellen Wahl der  $R_i$  definierte in  $L_w \cap V'$  holomorphe Funktion.

Für jede Gerade  $L_w$ , die einen Punkt von  $T^n$  enthält, ist  $L_w \cap ((D^n) \cup ((\bar{D})^n))$  die Kreislinie.  $g_w$  erfüllt nun wegen der Randeigentlichkeit von  $f$  in  $T^n$  die Fortsetzbarkeitsbedingung für Funktionen im Einheitskreis. Durch Spiegelung an der Kreislinie erhält man eine Funktion  $g'_w$ , die - wie man sieht - mit  $g_w$  übereinstimmt.  $g'_w$  ist also eine Fortsetzung von  $g_w$ .

Setzt man für  $z \in V'$  mit  $z \in L_W$ :  $f'(z) = g'_W(z_1)$ , so erhält man eine in ganz  $V'$  definierte und (wieder wegen der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation) dort holomorphe Funktion. (Man muß  $R_1$  und  $R_2$  dafür global wählen, was eventuell eine Verkleinerung von  $V'$  nach sich zieht.)

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=R_1} \frac{f(\alpha, \alpha \frac{z_2}{z_1}, \dots, \alpha \frac{z_n}{z_1})}{\alpha - z_1} d\alpha -$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=R_2} \frac{f(\alpha, \alpha \frac{z_2}{z_1}, \dots, \alpha \frac{z_n}{z_1})}{\alpha - z_1} d\alpha$$

Nach der vorigen Überlegung sind in  $V'$  nun  $f'$  und  $f$  auf allen komplexen Geraden, die  $T^n$  treffen, identisch, also in ganz  $V'$ . Damit ist  $f'$  die gewünschte Fortsetzung von  $f$  in  $V'$  und auch in  $V$  hinein.

d) Man zeigt nun, daß auf Grund der Kanteneigentlichkeit der Korrespondenz  $F$  alle Koeffizientenfunktionen von  $P$  die Voraussetzung der Zwischenbehauptung erfüllen.

Ist  $M$  die Menge der in  $U$  mehrfachen Wurzeln von  $P$ ,  
so zerfällt  $P$  in jeder einfach zusammenhängenden offenen  
Menge  $W$  aus  $D^n \cap U \setminus M$  in ein Produkt

$P|_W = (\zeta - h_1) \dots (\zeta - h_k)$  mit lauter verschiedenen Wurzeln  
 $h_k \in \mathcal{O}(W)$ .  $k$  ist der Grad von  $P$ .

Zu einer Punktfolge  $((x_v))$  mit  $x_v \in D^n \cap U$ , die gegen  
 $T^n$  konvergiert, gibt es eine solche Menge  $W$  mit  
 $x_v \in W$  für  $v = 1, 2, \dots$ .

Da alle  $h_k$  bekanntlich sogar stetig in  $\bar{W}$  sind, gilt dort

$$(\hat{F} - h_1) \cdot \dots \cdot (\hat{F} - h_k) = 0.$$

so folgt aus der Randeigentlichkeit von  $F$  in  $T^n$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left| h_k(x_v) - \frac{1}{\bar{h}_k(x_v)} \right| = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, k.$$

Da die Koeffizienten  $f_k$ ,  $k = 0, \dots, k$  von  $P$  jeweils in  $\bar{W}$   
elementarsymmetrische Funktionen der  $h_k$  sind, gilt auch

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left| f_k(x_v) - \frac{1}{\bar{f}_k(x_v)} \right| = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, k.$$

Das bedeutet aber  $\lim_{v \rightarrow \infty} |f_k(x_v)| = 1$ .

e) Zu zeigen ist noch, daß  $F'$  auf ganz  $V$  holomorph ist, also, daß  $\check{F}'$  eigentlich ist. Über  $U$  und  $\wp(U)$  ist das klar, über  $V'$  ist es leicht zu sehen. Über  $V'$  nimmt nämlich  $F'$  nur innere Punkte an, also kann  $G_F$ , über  $V'$  keine Randpunkte haben, die nicht über Randpunkten von  $V'$  liegen.

Damit ist Hilfssatz 10 bewiesen.

Satz 7 : Seien  $A_1, A_2$  Bishopsche Polyedergebiete im  $\wp^{n_1}$  bzw.  $\wp^{n_2}$  mit  $n_1 \geq n_2$ . Sei  $F : A_1 \dashrightarrow A_2$  eine irreduzible, holomorphe, vollkanteneigentliche, surjektive Korrespondenz, dann ist  $F$  zu einer irreduziblen, schwach holomorphen Korrespondenz  $F' : U_1 \dashrightarrow U_2$  fortsetzbar.

Beweis:

a) Sei  $\phi_i : U_i \dashrightarrow \wp^{n_i}$  gegeben durch

$z^i \mapsto (f_1^i(z^i), \dots, f_{n_i}^i(z^i))$ . Dann ist

$H := (\phi_2|_{A_2}) \circ F (\phi_1|_{A_1})^{-1} : D^{n_1} \dashrightarrow D^{n_2}$  eine

irreduzible, holomorphe, vollkanteneigentliche, surjektive Korrespondenz.

b) Nach Satz 4 gilt, daß jede Koordinatenfunktion  $w_j^2$  von  $D^{n_2}$  jeweils von  $m_j$  Koordinatenfunktionen  $w_j^1$  von  $D^{n_1}$  strikt abhängt.

Es gilt 
$$\sum_{j=1}^{n_2} m_j = n_1 .$$

Man erhält folglich  $n_2$  holomorphe Korrespondenzen

$$H_j : D^{m_j} \longrightarrow D .$$

( $H_j$  ist wieder irreduzibel und surjektiv )

c) Nach Hilfssatz 10 sind alle  $H_j$  fortsetzbar zu schwach holomorphen, irreduziblen Korrespondenzen  $H'_j : \mathbb{C}^{m_j} \longrightarrow \mathbb{C}$

Da  $G_H = G_{H_1} \times \dots \times G_{H_n}$ , erhalten wir mit

$$G_{H'} = G_{H'_1} \times \dots \times G_{H'_n} \text{ eine Fortsetzung } H' : \mathbb{C}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_2}$$

von  $H$  mit  $G_{H'} \cap (D^{n_1} \times D^{n_2}) = G_H$ .

d) Vermöge  $(\phi_1, \phi_2)^{-1}$  erhalten wir eine Fortsetzung  $G_{F'}$ , von  $G_F$ . Nehmen wir die irreduzible Komponente  $G_{F'}$ , die  $G_F$  enthält, so ist die zugehörige Korrespondenz  $F' : U_1 \longrightarrow U_2$  die gesuchte Fortsetzung von  $F$ .

Hilfssatz 11 : Sei  $A_1$  ein analytisches Polyedergebiet  
im  $\phi^{n_1}$ ,  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  eine volle Kante von  
 $A_1$ ,  $\phi_{\kappa_1, \kappa_2}$  beschreibende Abbildung,  $\Psi_{\kappa_1, \kappa_2}$   
die durch  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  gegebene maximale Abbildung  
und  $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  die durch  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  gegebene komplexe  
Basis,  $B_{\kappa}^1$  die komplexe Basis zu  $f_{\kappa}^1|_{A_1}$  für  
 $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , dann läßt sich die zu  $f_{\kappa}^1|_{A_1}$   
maximale Abbildung  $\tilde{f}_{\kappa}^1: A_1 \longrightarrow B_{\kappa}^1$  über  
 $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  faktorisieren,  $\tilde{f}_{\kappa}^1 = h_{\kappa} \circ \Psi_{\kappa_1, \kappa_2}$ .  
 $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  liegt vermöge der Abbildung  
 $g_{\kappa_1, \kappa_2} : B_{\kappa_1, \kappa_2} \longrightarrow B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times B_{\kappa_2}^1$  mit  
 $w \longmapsto (h_{\kappa_1}(w), \dots, h_{\kappa_2}(w))$  in  
natürlicher Weise über einem Teil von  
 $B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times B_{\kappa_2}^1$ .  $g_{\kappa_1, \kappa_2}$  ist auf die ganze  
abgeschlossene Hülle  $\bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}$  stetig fortsetzbar

zu einer Abbildung

$$\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2} : \bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2} \longrightarrow \bar{B}_{\kappa_1}^1 \times \dots \times \bar{B}_{\kappa_2}^1, \text{ so da\ss}$$

$$\text{gilt: } \exists B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times \exists B_{\kappa_2}^1 \subset \bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2}(\bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}).$$

Beweis:

a)  $A_1^{\kappa}$  sei wie in Hilfssatz 5 definiert. Analog  $\phi_{\kappa_1, \kappa_2}$

sei  $\phi'_{\kappa_1, \kappa_2} : A_1^{\kappa} \longrightarrow \phi^{\kappa - \kappa_1 + 1}$  definiert,  $B'_{\kappa_1, \kappa_2}$  sei

dazu die komplexe Basis und  $\psi'_{\kappa_1, \kappa_2}$  die zugehörige maximale

Abbildung.  $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  liegt in kanonischer Weise über einem Teil

von  $B'_{\kappa_1, \kappa_2}$ .  $\psi_{\kappa_1, \kappa_2}$  ist deshalb zu einer stetigen Abbildung

$\bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2} : \bar{A}_1 \longrightarrow \bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}$  fortsetzbar, analog  $\tilde{f}_{\kappa}^1$  zu einer

stetigen Abbildung  $\tilde{f}_{\kappa}^1 : \bar{A}_1 \longrightarrow \bar{B}_{\kappa}^1$ , und jede Abbildung

$h_{\kappa}$  zu einer Abbildung  $\bar{h}_{\kappa}$ , so da\ss  $\tilde{f}_{\kappa}^1 = \bar{h}_{\kappa} \circ \bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}$  gilt.

b) Wesentlich in der Argumentation dafür, da\ss alle Punkte von

$C := \exists B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times \exists B_{\kappa_2}^1$  von  $\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2}$  angenommen werden, ist,

daß  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  eine volle Kante ist.

Nach Definition ist  $\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2}(\bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}) = (\bar{f}_{\kappa_1}^1, \dots, \bar{f}_{\kappa_2}^1)(\bar{A}_1)$ .

Die Menge der Punkte auf  $C$ , die Urbilder in  $\bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}$  haben, ist nicht leer, da  $\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}(K_{\kappa_1, \kappa_2}) \neq \emptyset$ , und aus Stetigkeitsgründen in der Spurtopologie von  $C$  abgeschlossen. Sie ist in der Spurtopologie aber auch offen. Man zeigt dazu: Sie ist in jeder Koordinatenrichtung lokal fortsetzbar. Gäbe es nämlich einen Punkt  $c \in C$ , über den  $C$  nicht fort-

setzbar wäre, so gäbe es zu  $a \in \overbrace{\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}}^{-1}(c)$  eine

Kante  $K_{j_1, j_2}$  auf der nicht alle  $f_{\kappa}^1 : \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , gleichzeitig lokale Extremalwerte annehmen, und einige keine Randwerte annehmen. Dann hat aber  $(\phi'_{\kappa_1, \kappa_2}, \phi'_{j_1, j_2})$  keine Funktionalmatrix mit maximalem Rand auf  $K_{j_1, j_2}$ . Nach Voraussetzung, da  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  volle Kante ist, sind aber die  $(-)$  und da alle  $\bar{f}_{\kappa}^1$  in  $a$  Randwerte annehmen, alle  $(-)$  einzelnen  $f_{\kappa}^1$  schon auf  $K_{j_1, j_2}$  von  $\phi'_{j_1, j_2}$  holomorph abhängig. O.E. - da man ja ganz  $K_{j_1, j_2}$  betrachtet - seien  $f_{j_1}^1, \dots, f_{j_2}^1$  die ersten Koordinatenfunktionen  $z_1^1, \dots, z_j^1$ .

Dann ist  $e_{\kappa}(z^1) := f_{\kappa}^1(z_1^1, \dots, z_j^1, a_{j+1}, \dots, a_{n_1})$  lokal mit  $f_{\kappa}^1(z^1)$  wertgleich, und die holomorphen Funktionen  $e_{\kappa}$  und  $f_{\kappa}^1$  sind (lokal) holomorph abhängig. Die Funktionen  $e_{\kappa_1}, \dots, e_{\kappa_2}$  bilden lokal ein Funktionensystem mit maximalem Rang wie  $f_{\kappa_1}^1, \dots, f_{\kappa_2}^1$ . (Jedes  $e_{\kappa}$  hängt insbesondere von anderen Koordinaten ab.) Sie nehmen auf  $D^j$  im Widerspruch zur Annahme alle lokalen Extremalwerte unabhängig voneinander an, insbesondere - da sie alle in  $a$  Randwerte angenommen haben - alle Randwerte einer ganzen Umgebung. (Eine Kurve lokaler Extremalwerte, die einen Randpunkt von der komplexen Basis  $B^1$  enthält, ist natürlich selbst eine Randkurve der komplexen Basis. (Vgl.: Beweis von Hilfssatz 7).)

Hilfssatz 12 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\phi^{n_1}$  bzw.  $\phi^{n_2}$  mit  $n_1 \geq n_2$ ,  $F : A_1 \longrightarrow A_2$  eine holomorphe, vollkanteneigentliche Korrespondenz. Sei  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  eine Kante des bezüglich  $F$  ausgezeichneten Kantersystems und  $B_{\kappa_1, \kappa_2}, \phi_{\kappa_1, \kappa_2}, \psi_{\kappa_1, \kappa_2}, B_{\kappa}^1, \tilde{f}_{\kappa}^1$  wie in Hilfssatz 11 gegeben,  $B_j$  die komplexe Basis zu  $f_j^2|_{A_2}, \tilde{f}_j^2$  die zugehörige maximale Abbildung. Dann ist die nach

Hilfssatz 9 induzierte holomorphe Korrespondenz

$F_j : B \multimap B_j$  randeigentlich in allen Punkten

von  $\partial B_{\kappa_1, \kappa_2}$ , die vermöge  $\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2}$  über

$\partial B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times \partial B_{\kappa_2}^1$  liegen.

Beweis:

a) Die Bezeichnungen von Hilfssatz 11 seien übernommen,  $A_2^{\kappa_2}$

sei wie in Hilfssatz 5 definiert,  $B_j^1$  sei die komplexe Basis

zu  $f_j^2|_{A_2^{\kappa_2}}$ ,  $\tilde{f}_j^2$  die maximale Abbildung  $\tilde{f}_j^2 : A_2^{\kappa_2} \longrightarrow B_j^1$

$\tilde{f}_j^2$  ist ebenfalls zu einer stetigen Abbildung  $\bar{f}_j^2 : \bar{A}_2 \longrightarrow \bar{B}_j$  fortsetzbar.

b) Ist  $\bar{F} : \bar{A}_1 \multimap \bar{A}_2$  die durch die topologische Abschließung

$\bar{G}_F$  des Graphen  $G_F$  von  $F$  gegebene Korrespondenz, so ist  $\bar{F}$

stetig, und die Projektionen  $\check{\bar{F}} : \check{\bar{G}}_F \longrightarrow \bar{A}_1$  und

$\hat{\bar{F}} : \bar{G}_F \longrightarrow \bar{A}_2$  sind surjektiv.

Wegen der Eigentlichkeit von  $\check{F}$  nämlich hat  $\check{F}$  die surjektive

Fortsetzung  $\check{\bar{F}}$ , so daß für jeden Punkt  $z^1 \in \bar{A}_1$   $\check{\bar{F}}^{-1}(z^1)$

kompakt ist.  $\check{\bar{F}}$  ist auch abgeschlossen, also ist  $\bar{F}$  stetig.

Wegen der Surjektivität von  $F$  gibt es zu jeder Punktfolge

$((z^2, v))$  aus  $A_2$  eine Urbildfolge  $((z^1, v))$  in  $A_1$ .

Konvergiert  $((z^2, v))$  gegen  $z^{2,0} \in \bar{A}_2$ , so hat wegen der Kom-

paktheit von  $\bar{A}_1$  die Folge  $((z^1, v))$  mindestens einen Häufungs-

punkt  $z^{1,0}$  in  $\bar{A}_1$  mit  $(z^{1,0}, z^{2,0}) \in G_F$ . Alle Punkte des

Randes  $\partial A_2$  sind also Bilder von Punkten von  $\bar{A}_1$  und, weil  $\bar{F}(A_1) \subset A_2$  ist, sogar von Punkten von  $\partial A_1$ .

c) Sei  $R_{\kappa_1, \kappa_2} := \{w \in \bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2} : h_\kappa(w) \in \partial B_\kappa^1 \text{ für alle}$

$\kappa : \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2\}$  Nach Definition 8b.3 wissen wir, daß die Urbilder von  $R_{\kappa_1, \kappa_2}$  in  $\bar{A}_1$  im Durchschnitt von Kanten, auf denen  $F$  randeigentlich ist, liegen.

Sei  $w^\nu \in B_{\kappa_1, \kappa_2}$  mit  $w^\nu \rightarrow w \in R_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $b^\nu \in F_j(w^\nu)$  mit  $b^\nu \rightarrow b \in B_j$ . Sei nun  $a^2 \in \tilde{f}_j^2(b)$  und  $a^{2, \nu} \in \tilde{f}_j^2(b)$  mit  $a^{2, \nu} \rightarrow a^2 - f_j^2$  ist offen -, so daß o. E. gilt :  
 $\bar{F}(a^{2, \nu}) \cap \bar{\phi}^1(w^\nu) \neq \emptyset$ .

Nach Satz 4, Zusätze, sind alle  $f_i^2$  mit  $\tilde{f}_j^2 \neq \tilde{f}_j^2$

außerhalb einer niederdimensionalen Menge in  $A_1$  über  $\bar{\phi}^1(w)$ ,

$w \in B_{\kappa_1, \kappa_2}$  nicht konstant. Wir gehen also notfalls von

$a^{1, \nu} \in \bar{\phi}(w^\nu)$  zu  $a^{1, \nu}$  mit  $|a^{1, \nu} - a^{1, \nu}| < \frac{\epsilon}{\nu}$  über,

und erhalten - wegen der Stetigkeit von  $\bar{F}$  - eine für unsere Zwecke äquivalente Folge  $w'^\nu$ , derart, daß das Bild unter  $F$  von  $\bar{\phi}^1(w'^\nu)$  jeweils unbeschränkt in  $\tilde{f}_j^2(b'^\nu)$  ist, also auch einen Punkt  $a^{2, \nu}$  aus einer Umgebung von  $a^2$  trifft.

$a^{1, \nu}$  ist nun eine Folge, die nur Häufungspunkte auf einer Kante hat, auf der  $F$  randeigentlich ist, deren Bilder aber  $a^2$  als Häufungspunkt haben. Widerspruch! Also gilt :

$$\bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}^{-1} \circ \bar{F}(R_{\kappa_1, \kappa_2}) \subset \bar{f}_j^2 \circ \bar{\phi}^1(\partial B_j).$$

d) Ist  $M$  eine kompakte Menge in  $B_j$ ,  $w^0 \in R_{\kappa_1, \kappa_2}$ , dann gilt also

$$\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \xrightarrow{-1} \check{\overline{F}}(w^0) \cap \check{\widetilde{F}}_j^2 \xrightarrow{-1} \widehat{\overline{F}}(M) = \emptyset$$

e) Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \overline{A}_1 & \xleftarrow{\check{\overline{F}}} & G_{\overline{F}} & \xrightarrow{\widehat{\overline{F}}} & \overline{A}_2 \\ \downarrow \overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} & & \downarrow & & \downarrow \check{\widetilde{F}}_j^2 \\ \overline{B}_{\kappa_1, \kappa_2} & \xleftarrow{\check{\widetilde{F}}_j} & G_{\overline{F}_j} & \xrightarrow{\widehat{\overline{F}}_j} & \overline{B}_j \end{array}$$

kann man folgern:

$$\check{\overline{F}}_j \xrightarrow{-1} (w^0) \cap \widehat{\overline{F}}_j \xrightarrow{-1} (M) =$$

$$(\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{\overline{F}}, \check{\widetilde{F}}_j^2 \circ \widehat{\overline{F}}) (\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \xrightarrow{-1} \check{\overline{F}}(w^0)) \cap (\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{\overline{F}}, \check{\widetilde{F}}_j^2 \circ \widehat{\overline{F}}) (\check{\widetilde{F}}_j^2 \xrightarrow{-1} \widehat{\overline{F}}(M)) = \emptyset$$

Da nämlich  $\check{\widetilde{F}}_j^2 \circ \widehat{\overline{F}}$  auf  $\{\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{\overline{F}} = \text{const.}\}$  konstant ist,

ist die obige Schnittmenge genau dann leer, wenn gilt:

$$(\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{\overline{F}}) (\overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \xrightarrow{-1} \check{\overline{F}}(w^0)) \cap \overline{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \check{\overline{F}} (\check{\widetilde{F}}_j^2 \xrightarrow{-1} \widehat{\overline{F}}(M)) = \emptyset$$

Dies ist aber nach "d)" der Fall.

f) Nach Hilfssatz 9 ist  $F_j$  stetig, damit aber auch die durch  $G_{\bar{F}_j}$  definierte Korrespondenz zwischen  $\bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}$  und  $\bar{B}_j$ . Deshalb gibt es zu  $w^0$  eine Umgebung  $V$  ( $w^0$  geeignet in  $B'_{\kappa_1, \kappa_2}$  eingebettet), so daß gilt:

$$\bigvee_{j=1}^{v-1} (V \cap B_{\kappa_1, \kappa_2}) \cap \hat{\bar{F}}_j^{-1}(M) = \emptyset$$

Damit ist die Randeigentlichkeit von  $F_j$  in  $w^0$  bewiesen.

Hilfssatz 13 : Seien die Voraussetzungen wie bei Hilfssatz 12

und  $R_{\kappa_1, \kappa_2} :=$

$$\{w \in \bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2} : g_{\kappa_1, \kappa_2}(w) \in \partial B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times \partial B_{\kappa_2}^1\}$$

Dann gibt es eine offene Halbumgebung  $V_{\kappa_1, \kappa_2}$  von

$R_{\kappa_1, \kappa_2}$  in  $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  und eine offene Umgebung

$U_{\kappa_1, \kappa_2}$  von  $T^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$  und eine holomorphe

eigentliche Abbildung

$$h_{\kappa_1, \kappa_2} : V_{\kappa_1, \kappa_2} \longrightarrow U_{\kappa_1, \kappa_2} \cap D^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$$

Beweis:

Jedes  $B^1$  ist nach Hilfssatz 7 und einem Satz von Ahlfors dem Einheitskreis  $D$  überlagerbar durch Abbildungen  $h_{\kappa}^1$ .

$$h_{\kappa_1, \kappa_2} := (h_{\kappa_1}^1, \dots, h_{\kappa_2}^1) \circ g_{\kappa_1, \kappa_2} : B_{\kappa_1, \kappa_2} \longrightarrow D^{k_2 - k_1 + 1}$$

ist dann eine Abbildung, die auf  $\partial B_{\kappa_1, \kappa_2}$  stetig fortsetzbar ist, so daß  $T^{k_2 - k_1 + 1}$  im Bild von  $\bar{B}_{\kappa_1, \kappa_2}$  der Fortsetzung  $\bar{h}_{\kappa_1, \kappa_2}$  enthalten ist.

Nach Beweis "c)" von Hilfssatz 12 gibt es zu jedem Punkt von  $R_{\kappa_1, \kappa_2}$  einen Urbildpunkt (bzgl.  $\bar{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2}$ ), der auf einer Kante  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  des durch  $F$  ausgezeichneten Kantensystems  $K_1, \dots, K_t$  liegt.

Nach Definition der vollkanteneigentlichen Korrespondenz gibt

es zu jedem Punkt  $z^{1,0} \in \bigcup_{\tau=1}^t K_{\tau}$  die Kante  $K_{\kappa_1, \kappa_2} = K_{\tau_0}$  beschreibende Funktionen  $f_{\kappa_1}^1, \dots, f_{\kappa_2}^1$ , die in  $z^{1,0}$  eine

Funktionalmatrix mit maximalem Rang haben. In einer Halbumgebung  $V$  von  $z^{1,0}$  ist also  $\Psi_{\kappa_1, \kappa_2}$  strikt abhängig von

$\tilde{f}_{\kappa_1}^1, \dots, \tilde{f}_{\kappa_2}^1$ , so daß  $h_{\kappa_1}, \dots, h_{\kappa_2}$  dann lokal als Koordi-

natenfunktionen von  $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  aufgefaßt werden können.

Pro Koordinate von  $D^{k_2-k_1+1}$  gibt es also eine Halbumgebung

$V(z^1, 0)$  von  $z^1, 0$ , wo  $'\bar{h}_{k_1, k_2} \circ \bar{\psi}_{k_1, k_2}$  Randfasern von

$\tilde{f}_k^1$  - Mengen der Gestalt  $\{z^1 \in \partial A_1 \cap \bar{V}(z^1, 0) : f_k^1(z^1) = w\}$ ,

mit  $w \in \partial B_k^1$  - nur in Randpunkte von  $D^{k_2-k_1+1}$  überführt, weil ja alle solche Randfasern mindestens einen Punkt des Urbilds von  $R_{k_1, k_2}$  treffen.

Sei  $V^1(z^1, 0) := \bigcup_{k=k_1}^{k_2} V(z^1, 0)$ , dann gibt es zu

$d^0 := '\bar{h}_{k_1, k_2} \circ \bar{\psi}_{k_1, k_2}(z^1, 0) - d^0 \in T^{k_2-k_1+1}$  - eine

Umgebung

$U(d^0)$ , so daß  $'h_{k_1, k_2} \circ \psi_{k_1, k_2}(V^1(z^1, 0)) = U(d^0) \cap D^{k_2-k_1+1}$ .

Nach Hilfssatz 12 kommen alle Punkte von  $T^{k_2-k_1+1}$  als Bildpunkte vor. Endlich viele Umgebungen obiger Konstruktion

$U(d^i)$ ,  $i = 0, \dots, m$ ; überdecken ganz  $T^{k_2-k_1+1}$ . Sei

$U_{k_1, k_2} := \bigcup_{i=1}^m U(d^i)$ ,  $V_{k_1, k_2} := '\bar{h}_{k_1, k_2}^{-1}(U_{k_1, k_2} \cap D^{k_2-k_1+1})$

und  $h_{k_1, k_2} := 'h_{k_1, k_2} \mid V_{k_1, k_2}$ .

Damit ist Hilfssatz 13 bewiesen.

Satz 8 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^{n_1}$  bzw.  $\mathbb{C}^{n_2}$  mit  $n_1 \geq n_2$ . Sei  $K_1, \dots, K_t$  ein ausgezeichnetes Kantensystem von  $A_1$ , so gibt es zu jeder Kante  $K_\tau$  der topologischen Dimension  $d_\tau$  Teilmengen  $S_\tau^1$ , höchstens von der Dimension  $d_\tau - 1$ , und eine topologisch höchstens  $2n_2 - 2$  - dimensionale Teilmenge  $S^2$  von  $\partial A_2$  und Gebiete

$A'_1, A'_2$  in  $U_1$  bzw.  $U_2$  mit:

$$A'_1 \supset (A_1 \cup K_1 \cup \dots \cup K_t) \setminus (S^1 \cup \dots \cup S^1),$$

$$A'_2 \supset \bar{A}_2 \setminus S^2,$$

so daß jede auf  $K_1, \dots, K_t$  vollkanteneigentliche, irreduzible, holomorphe Korrespondenz  $F : A_1 \dashrightarrow A_2$  fortsetzbar ist zu einer irreduziblen, schwach holomorphen Korrespondenz  $F' : A'_1 \dashrightarrow A'_2$ .

**Beweis:**

a) Die Notation sei wie im Beweis von Satz 6, von Hilfssatz 11, und von Hilfssatz 12.

b) Nach Satz 4, Hilfssatz 8 und Hilfssatz 9 erhält man holomorphe Korrespondenzen  $F_j : B_{\kappa_1, \kappa_2} \dashrightarrow B_j$ .

c) Nach Hilfssatz 13 gibt es eine eigentliche holomorphe Abbildung  $h_{\kappa_1, \kappa_2}$  einer in  $B_{\kappa_1, \kappa_2}$  offenen Halbumgebung  $V_{\kappa_1, \kappa_2}$  von  $R_{\kappa_1, \kappa_2}$  in den Durchschnitt von  $D^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$  und einer offenen (spiegelsymmetrischen - vgl. Hilfssatz 10 -) Umgebung  $U_{\kappa_1, \kappa_2}$  von  $T^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1}$ .

d) Sei nun  $(\kappa_1, \kappa_2)$  und  $j$  gemäß Satz 4 einander zugeordnet, derart daß  $f_j^2$  strikt abhängt von  $\phi_{\kappa_1, \kappa_2}$ .

Aus "b)" und "c)" und Hilfssatz 13 erhält man eine holomorphe Korrespondenz  $H_j : U_{\kappa_1, \kappa_2} \cap D^{\kappa_2 - \kappa_1 + 1} \longrightarrow D$ , die nach Hilfssatz 10 fortsetzbar ist zu einer holomorphen Korrespondenz

$H_j^! : U_{\kappa_1, \kappa_2} \longrightarrow \overline{D}$ , wenn, was o.B.d.A. möglich ist,  $U_{\kappa_1, \kappa_2}$  mit den Eigenschaften von der Umgebung  $V$  in Hilfssatz 10 gewählt ist.

e) Sei  $K := \bigcup_{\tau=1}^t K_\tau$ .

$S^{1,1} := \{z^1 \in K_{\kappa_1, \kappa_2} : K_{\kappa_1, \kappa_2} \subset K \text{ und es gibt ein}$

$\kappa : \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , so daß  $\tilde{f}_\kappa^{1,1}(z^1)$  kein innerer Punkt eines reellanalytischen Randstücks von  $B_\kappa^1$  in  $B_\kappa^{1,1}$  ist}

$S^{1,2} := \{z^1 \in K_{\kappa_1, \kappa_2} : K_{\kappa_1, \kappa_2} \subset K \text{ und es gibt eine Kante}$   
 $K_{\kappa_1', \kappa_2'} \subset K, \text{ so daß der geometrische Rang in } z^1$   
 $\text{der Abbildung } (\psi_{\kappa_1, \kappa_2}, \psi_{\kappa_1', \kappa_2'}) \text{ nicht maximal ist}\}$

$S^1 := S^{1,1} \cup S^{1,2}$

$S^2 := \{z^2 \in \partial A_2 : \text{es gibt ein } \kappa \in \{1, \dots, k_2\}, \text{ so daß}$   
 $f_{\kappa}^2(z^2) \in \partial B_{\kappa} \text{ und } f_{\kappa}^2(z^2) \text{ kein innerer Punkt}$   
 $\text{eines reellanalytischen Randstücks von } B_{\kappa} \text{ in}$   
 $B'_{\kappa} \text{ ist}\}$

f) Sei  $z^1 \in K \setminus S^1$ , dann sei für  $(\kappa_1, \kappa_2)$  mit  $K_{\kappa_1, \kappa_2} \subset K$   
 eine Umgebung  $V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1)$  von  $z^1$  folgendermaßen gewählt:

(i) so klein, daß  $\psi_{\kappa_1, \kappa_2}(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1))$  einfach über  
 $\psi'_{\kappa_1, \kappa_2}(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1))$  liegt, und  
 $f^1(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1))$  einfach über  $f'^1(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1))$   
 liegt.

(ii)  $h_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \psi_{\kappa_1, \kappa_2}(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1)) \subset U_{\kappa_1, \kappa_2}$

(iii) und wenn  $\bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1)) \cap R_{\kappa_1, \kappa_2} \neq \emptyset$  gilt

$\bar{g}_{\kappa_1, \kappa_2} \circ \bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1))$  auf

$\partial B_{\kappa_1}^1 \times \dots \times \partial B_{\kappa_2}^1$  nur innere Punkte von reellanalytischen Randstücken der  $B_{\kappa}$  getroffen werden, oder andernfalls,

$\bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}(A_1 \cap V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1)) \cap \partial B_{\kappa_1, \kappa_2} = \emptyset$  ist.

"(i)" ist möglich, weil in einer Umgebung von  $K$  die Funktionalmatrix der  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  beschreibenden Funktionen maximalen Rang hat.

"(ii)" ist wegen der Stetigkeit von  $\bar{\psi}_{\kappa_1, \kappa_2}$  möglich.

"(iii)": Die Alternative besteht nach der Definition von  $S^1$ .

Das erste gilt, wenn  $z^1 \in K_{\kappa_1, \kappa_2}$  ist.  $\tilde{f}_{\kappa}^1: \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , ist

ein innerer Punkt eines reellanalytischen Kurvenstücks von

$\partial B_{\kappa}^1$  da  $z^1 \notin S^{1,1}$ .

Das zweite ist der Fall, wenn  $z^1 \in K_{\kappa_1', \kappa_2'}$ ,  $\nmid K_{\kappa_1, \kappa_2}$ . Da

$z^1 \notin S^{1,2}$  bildet  $\psi_{\kappa_1, \kappa_2}$  alle Mengen der Gestalt

$\{\bar{\psi}_{\kappa_1', \kappa_2'} = \text{const.}\}$  volldimensional ab, also

$$\bar{\Psi}_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1) \in B_{\kappa_1, \kappa_2}.$$

$$\text{Nun sei } V^1(z^1) := \bigcup_{\substack{(\kappa_1, \kappa_2) \text{ mit } \\ K_{\kappa_1, \kappa_2} \subset K}} V_{\kappa_1, \kappa_2}(z^1)$$

g) Sei  $z^2 \in A_2 \setminus S^2$ , dann sei für  $\kappa \in \{1, \dots, k_2\}$   $V_\kappa(z^2)$  folgendermaßen gewählt:

(i) so klein, daß  $\tilde{r}_\kappa^2(A_2 \cap V_\kappa^2(z^2))$  einfach über

$\tilde{r}_\kappa'^2(A_2 \cap V_\kappa^2(z^2))$  liegt, und

(ii) falls  $\tilde{r}_\kappa^2(A_2 \cap V_\kappa^2(z^2)) \cap \partial B_\kappa^2 \neq \emptyset$ , so klein, daß nur innere Punkte von reellanalytischen Kurvenstücken von  $\partial B_\kappa^2$  getroffen werden.

$$\text{Nun sei } V^2(z^2) := \bigcup_{\kappa=1}^{k_2} V_\kappa(z^2).$$

h) Man kann nun definieren:

$$A_1' := A_1 \cup \left( \bigcup_{z^1 \in K \setminus S^1} V^1(z^1) \right)$$

$$A_2' := A_2 \cup \left( \bigcup_{z^2 \in \partial A_2 \setminus S^2} V^2(z^2) \right)$$

i) Zur Charakterisierung der Mengen  $S^1, S^2$  :

Für  $S^2$  gilt das im Beweis von Satz 6 gesagte.

$S^{1,1}$  kann koordinatenweise beschrieben werden. In den einzelnen Koordinaten gilt wieder das im Beweis zu Satz 6 gesagte.  $S^{1,2}$  ist Schnitt einer höchstens komplex  $n-1$  dimensional analytischen Menge mit  $K$ , die aber keine Kantenumenge  $K_{\kappa_1, \kappa_2} \subset K$  in einer ganzen offenen Umgebung eines Kantepunktes enthält. Man kann also schließen, daß die topologische Dimension der Schnittmenge jeweils zumindest um 1 kleiner als die von  $K_{\kappa_1, \kappa_2}$  ist.

j) Sei nun  $z^1 \in K \setminus S^1$ ,  $z^2 \in \partial A_2 \setminus S^2$ .  $V^1 := V^1(z^1)$ ,  $V^2 := V^2(z^2)$ .

Nach Wahl von  $V^1$  ist natürlich  $g_{\kappa_1, \kappa_2}$  über  $\partial B_{\kappa_1, \kappa_2}$  in ganz  $\psi_{\kappa_1, \kappa_2}^1(V^1)$  fortsetzbar, da alle  $f_{\kappa}^1(A_1 \cap V^1)$ ,

$\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , einfach über einem Teil von  $\tilde{f}_{\kappa}^1(V^1)$  liegen.

Über  $\partial B_{\kappa}^1 \cap \tilde{f}_{\kappa}^1(V^1)$  sind alle  $h_{\kappa}^1$ ,  $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$ , in ganz  $\tilde{f}_{\kappa}^1(V^1)$  durch Spiegelung fortsetzbar. So hat man insgesamt

$h_{\kappa_1, \kappa_2}$  in ganz  $\psi_{\kappa_1, \kappa_2}^1(V^1)$  fortgesetzt.

Nach Wahl von  $V^2$  ist, wie  $h_{\kappa}^1$  oben,  $h_j$  in ganz  $\tilde{f}_j^2(V^2)$  durch Spiegelung fortsetzbar.

Vermöge dieser Fortsetzungen ist dann  $G_{H,j}$  liftbar zu einer analytischen Menge  $G_j^{V^1, V^2}$  in  $\Psi_{\kappa_1, \kappa_2}^1(V^1) \times \tilde{F}_j^2(V^2)$ .

$\tilde{G}^{V^1, V^2} := \bigcup_{j=1}^{k_2} \left( \Psi_{\kappa_1, \kappa_2}^1 \xrightarrow{-1} \tilde{F}_j^2 \right) (G_j^{V^1, V^2})$  ist dann eine Fortsetzung

von  $G_F$  in  $V^1 \times V^2$ . Man nehme nun die irreduziblen Komponenten von  $\tilde{G}^{V^1, V^2}$ , die eine irreduzible Komponente von  $G_F \cap (V^1 \times V^2)$  enthalten, als  $G^{V^1, V^2}$ .

k) Insgesamt enthält man eine Fortsetzung  $\tilde{G}$  von  $G_F$  in ganz  $A_1' \times A_2'$ . Die kleinste irreduzible Komponente, die  $G_F$  enthält, sei mit  $G_F$  bezeichnet. Sie definiert eine irreduzible, schwach holomorphe Korrespondenz, wie verlangt.

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Satz 9 : Seien  $A_1, A_2$  analytische Polyedergebiete im  $\mathbb{C}^n$ .

$K_1, \dots, K_t$  sei ein ausgezeichnetes Kantensystem von  $A_1$ , dann ist jede holomorphe, auf

$K_1, \dots, K_t$  vollkanteneigentliche Korrespondenz

$F : A_1 \longrightarrow A_2$  eine Überlagerungskorrespondenz.

Beweis:

a) Skizze: Mit Hilfe von Satz 8 beweist man, daß alle Kanten  $K_1, \dots, K_t$  Hyperflächen sein müssen. Daraus kann man dann folgern, daß  $F$  eigentlich und eine Überlagerungskorrespondenz ist.

b) Nach Satz 8 und Hilfssatz 10 gibt es auf jeder Kante  $K_\tau$  einen Punkt  $z^1$  und eine Umgebung  $V$  und einen Bildpunkt  $z^2$ ,  $\bar{F}(z^1) \ni z^2$ , mit einer Umgebung  $V'$  von  $z^2$ , so daß  $G_F \cap (V \times V')$  holomorph in  $V \times V'$  fortgesetzt werden kann. Ohne Einschränkung kann nun angenommen werden, daß die Fortsetzung  $G^{V,V'}$  über  $z^1$  Mannigfaltigkeitscharakter hat. Verkleinert man  $V$  geeignet, so erhält man eine holomorphe Abbildung von  $V$  in  $V'$ , bei der die Urbilder von 1-codimensionalen analytischen Mengen der Gestalt  $\{z^2 \in V' : f^2(z^2) = e^{i\psi}\}$  auf  $K_\tau \cap V$  liegen. Dann muß aber nach  $K_\tau$  1-codimensionale analytische Mengen enthalten. Das ist nur der Fall, wenn die Kante  $K_\tau$  selbst Hyperfläche ist.

$F : A_1 \longrightarrow A_2$  ist auf allen Hyperflächen, die durch eine Funktion, die eine Kante des ausgezeichneten Kantensystems lokal beschreibt, eigentlich. Das sind nach Voraussetzung aber alle  $A_1$  begrenzenden Hyperflächen.

Also ist  $F$  eigentlich, surjektiv, nirgends entartet, ebenso  
 $-1$   
 $F$ .  $F$  ist holomorphe Überlagerungskorrespondenz.

Bemerkung: In Satz 9 ist die Voraussetzung, daß  $F$  vollkanteneigentlich ist, nicht zu ersetzen durch Kanteneigentlichkeit auf einem Kantensystem, das als beschreibende Funktionen ein vollständiges Repräsentantensystem von  $A_1$  besitzt.

Beispiel:

Sei  $g$  eine Abbildung, die  $D$  auf  $E := D \cap (\{z_1 : \operatorname{Im}(z_1) > 0\}$

$\cup \{z_1 : \operatorname{Re}(z_1) > 0\}) \cup \{z_1 : |z_1| < \frac{1}{2}\}$  biholomorph abbildet,

außerdem gelte für die stetige Fortsetzung  $\bar{g}$  auf den Rand  $T$

von  $D$   $\bar{g}(1) = -\frac{1}{2}$ .

$h : E \rightarrow D$  sei gegeben durch  $z_1 \mapsto (z_1)^2$ .  $f := h \circ g$ .

Die Abbildung  $(f, \operatorname{id}) : D^2 \rightarrow D^2$  ist surjektiv und nirgends entartet und ist eine holomorphe auf  $T^2$  kanteneigentliche Korrespondenz. Sie ist aber keine holomorphe Überlagerungskorrespondenz, weil Randpunkte von  $D^2$ , etwa  $(1, 0)$ , auf innere Punkte abgebildet werden.



LITERATURVERZEICHNIS

- ( 1 ) L. Ahlfors: Open Riemann Surfaces and Extremal Problems on Compact Subregions. Comm. Math. Helv. 24, 100-134 (1950)
- ( 2 ) H. Behnke und E. Peschl: Starre Regularitätsbereiche. Wiener Monatshefte für Math. und Phys. 43 (1936)
- ( 3 ) H. Behnke und K. Stein: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. 124 (1951)
- ( 4 ) H. Cartan: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. 125 (1952)
- ( 5 ) J. Eickel: Glatte starre Holomorphiegebiete vom topologischen Typ der Hyperkugel. Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster, Heft 20 (1961)
- ( 6 ) K.H. Hedtfeld: Starre einfach zusammenhängende Holomorphiegebiete. Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster, Heft 8 (1954)
- ( 7 ) H. Grauert und R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958)
- ( 8 ) R. Narasimhan: Introduction to the Theory of Analytic Spaces. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1966)
- ( 9 ) W.F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie. Verlag Teubner, Leipzig und Berlin (1929)
- (10) V.E.C. Osorio: Randeigenschaften eigentlicher, holomorpher Abbildungen. Dissertation, Universität München (1961)

- (11) A. Pfister: Über das Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen von zwei Veränderlichen.  
Math. Ann. 146, 249-262 (1960)
- (12) R. Remmert und K. Stein: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Zeitschrift 73 (1960)
- (13) H. Rischel: Ein Satz über eigentliche holomorphe Abbildungen von analytischen Polyedergebieten.  
Mathematica Scandinavica 14, 220-224 (1964)
- (14) H. Rischel: Holomorphe Überlagerungskorrespondenzen.  
Mathematica Scandinavica 15, 49-63 (1964)
- (15) W. Rothstein: Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raume zweier komplexer Veränderlichen. Das Verhalten der Abbildung auf gewissen analytischen Subvarietaeten.  
Dissertation, Universität Bonn 1964
- (16) B. Shiffman: On the continuation of analytic curves.  
Math. Ann. 184, 268-274 (1970)
- (17) K. Stein: Topics on Holomorphic Correspondences.  
(Erscheint demnächst)

## LEBENS LAUF

Ich wurde am 05.11.1940 in München als Sohn des Reichsbahnrats Dr. Heinrich Stiegler und seiner Ehefrau Inge, geb. Compter, geboren.

Von 1946 bis 1950 besuchte ich die Volksschule von Rottach-Egern, von 1951 bis 1960 die Oberrealschule Regensburg, an der ich im Juli 1960 mein Abitur ablegte. Vom Oktober 1960 bis November 1961 leistete ich Wehrdienst. Anschließend begann ich an der Universität München mit dem Studium der Mathematik, das ich am 04.12.1967 mit der Diplomprüfung für Mathematik beendete.

Seit April 1968 bin ich als Wissenschaftlicher Angestellter der Bayerischen Akademie der Wissenschaften bzw. der Technischen Universität München beschäftigt.

Hall + Stiegler





